DANS NOS CLASSES

DIFFÉRENTS TYPES DE CROISSANCE

N.d.l.r. L'activité décrite ici est une réécriture d'une activité parue dans la brochure « Déchiffrer par les maths »[1]. Elle a toute sa place au niveau de la classe de première de série générale ou de série technologique STI2D ainsi qu'au niveau de terminale STMG ou ST2S.

Objectifs visés
- Comparer différents types d'évolution , en particulier la croissance linéaire et la croissance exponentielle, à partir d'une représentation graphique et/ou d'un tableau de données ou d'un algorithme.
- Analyser et critiquer des documents commentant la croissance de certains phénomènes.

Cette activité sur les « types de croissance » se place avant de traiter le chapitre sur les suites numériques. La raison en est la suivante : nous ne voulions pas aborder simultanément deux nouvelles notions, la croissance exponentielle d'une part, et la notation mathématique des suites numériques. De plus, l'erreur que l'on retrouve couramment dans les médias, qui consiste à considérer comme exponentielle toute croissance très rapide, montre la nécessité d'analyser des croissances indépendamment d'utilisation de notions mathématiques mal maitrisées

Un avantage de cette démarche est aussi de proposer le chapitre « Suites numériques » comme un chapitre de modélisation mathématique. Une fois les concepts concernant la croissance linéaire et la croissance exponentielle acquis dans le langage vernaculaire, on pourra les formaliser ultérieurement en utilisant le langage des suites : bien sûr, on montrera alors l'intérêt de cette formalisation, en particulier dans tous les problèmes où la valeur initiale est inconnue.

L'activité 1 (*voir annexe 1*) commence par une étude de données concernant les croissances de la population cinq villes.

Il est demandé aux élèves de caractériser le plus précisément possible, par écrit et en langage courant, les cinq types de croissance proposés. Pour que l'activité puisse se poursuivre correctement, il est recommandé de prendre une dizaine ou une quinzaine de minutes en fin d'heure pour faire ce travail : ainsi, le professeur aura le temps de recenser les réponses des élèves et, de retour chez lui, de les analyser, de les classer, et éventuellement de préparer un diaporama pour présenter quelques-unes de ces réponses à la classe. Leur analyse sera reprise en fin du T.P. sur ordinateur.

Pour votre information, les croissances proposées ont été calculées de la façon suivante :
A) Croissance linéaire (suite arithmétique de raison 30 000).
B) Croissance exponentielle de 8 % par an (suite géométrique de raison 1,08).
C) Écart exponentiel décroissant entre la population et une « limite asymptotique » : $P = 600\ 000 - 300\ 000 * 0{,}8^x$, x étant le nombre d'années écoulées depuis 2008.
D) Différences secondes constantes : croissance parabolique $P = 3750x^2 + 3750x + 300000$, x étant le nombre d'années écoulées depuis 2008).
E) Croissance sans régularité apparente.
Voici, en exemples, quelques unes des réponses qui avaient été données par des élèves à la première question.

1 Cette brochure, publiée en 2002, est en vente à l'IREM de Lorraine et sur le site de l'APMEP. Les auteurs étaient Brigitte Cousinou, Virginie Maitrot, Janine Marchal, Marie-Hélène Munier, Michel Prunier et Jacques Verdier.

Ville A :
Les mots qui reviennent le plus souvent sont « *croissance régulière* », « *constante* », « *ligne droite* », « *croissance linéaire* ». On trouve cependant « *croissance progressive* », « *croissance proportionnelle* », et « *une courbe qui évolue dans le sens de l'augmentation* ».

Ville B :
La majorité des élèves constatent que la courbe « *n'est pas une droite* », « *pas linéaire* ». Cependant, un nombre non négligeable qualifie cette croissance de « *linéaire* ». Certains qualifient l'augmentation de « *rapide* ». En ce qui concerne la régularité, une majorité opte pour « *régulière* », et une minorité pour « *irrégulière* », avec des nuances comme « *courbe semi-régulière* », « *courbe irrégulière mais régulière en chiffres* ».

Ville C :
La majorité des élèves constatent que la croissance « *se ralentit* », que « *ça augmente de moins en moins fort* », « *de moins en moins vite* », etc. En ce qui concerne la forme de la courbe, elle est « *courbée vers le haut* », « *fortement bombée* »… Plusieurs la qualifient de « *parabole* », une élève précisant même « *la forme de la courbe nous permet de deviner que la population va diminuer à partir de 2016* ». Très peu d'élèves utilisent encore l'adjectif « *régulière* », mais il en reste qui la qualifient toujours de « *linéaire* ».

Ville D :
Comme pour l'exemple précédent, mais en « *accélérant* », croissant « *de plus en plus vite* », etc. pour une grande majorité. Avec même une extrapolation : « *rien ne laisse présager une descente* » (ce n'est pas la même élève que celle qui l'avait pressentie pour la courbe C). La croissance n'est plus « *régulière* » que pour très peu d'élèves, elle reste « *linéaire* » pour une seule, mais apparait le mot « *exponentielle* » (rarement).

Ville E :
Une quasi-unanimité pour qualifier la croissance (ou la courbe) « *d'irrégulière* », plus rarement de « *variable* ». La forme de la courbe est qualifiée de « *cassée* » (assez souvent), « *tordue* », « *saccadée* », « *en dents de scie* », « *ligne brisée* ». Quelques élèves précisent qu'elle reste cependant toujours croissante, certains fort maladroitement : « *l'augmentation reste constante malgré tout* ».

Second temps de l'activité : Les élèves travaillent sur l'onglet 'Feuille de calculs'[2] du fichier 'TP Types de croissance'. Le premier onglet doit être « protégé », ainsi que les colonnes en vert du second fichier.

Il est demandé aux élèves de calculer, pour chacune des cinq villes, l'écart et le taux d'évolution d'une année à l'autre. A la fin de cette activité et de ce T.P., on donnera en « cours » la définition de la croissance linéaire et de la croissance exponentielle ; on fera le lien avec des graphiques (ceux qui étaient proposés dans l'activité et ceux qu'on trouve dans la plupart des manuels) qui permettent de retenir une « image mentale » équivalente à la définition.

Définitions que l'on peut donner :

Une croissance est dite exponentielle lorsque les taux d'évolution successifs sont constants, ou encore lorsque les coefficients multiplicatifs successifs sont constants.

Une croissance est dite linéaire lorsque les écarts successifs sont constants.

On précisera qu'il n'y a aucune raison de se restreindre aux cas où le coefficient multiplicateur est supérieur à 1 : dans le cas où il est inférieur à 1, il s'agit alors d'une « décroissance », mais qui rentre dans le modèle de « croissance exponentielle » (le taux d'évolution est négatif).

On précisera également (éventuellement au cours des activités et exercices suivants) que ces taux sont calculés sur des périodes identiques (tous les ans, tous les mois, etc.) ; cependant, si on l'inclut dans la définition, celle-ci devient trop lourde.

Mais comment reconnaitre une croissance linéaire ? une croissance exponentielle ? On verra dans les exercices d'application ci-après (*voir annexe 3*) que si l'on peut se fier au graphique pour ce qui est de la croissance linéaire, c'est impossible dans le cas d'une exponentielle : on devra donc recourir au calcul du taux d'évolution (annuel, le plus souvent).

N.B. Dans les exemples concrets, si les taux d'évolution sont "quasiment constants", cela légitime que l'on choisisse la croissance exponentielle comme modèle.

L'activité 2 (*voir annexe 2*) fait travailler les élèves sur l'utilisation abusive du vocable « croissance exponentielle » dans les médias.

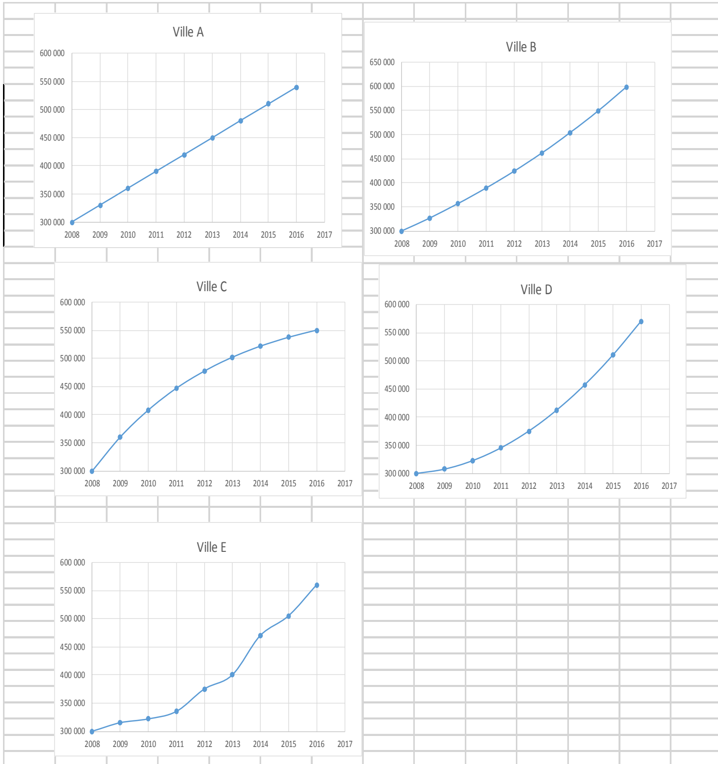
2– La feuille de calcul est disponible ici.

Retour au sommaire

ANNEXE 1 (FICHE ÉLÈVE)

<u>Premier temps</u> : travail individuel de quelques minutes (écrivez vos propositions sur papier).

Année	Ville A	Ville B	Ville C	Ville D	Ville E
2008	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000
2009	330 000	327 000	360 000	307 500	315 000
2010	360 000	356 430	408 000	322 500	322 000
2011	390 000	388 509	446 400	345 000	335 000
2012	420 000	423 474	477 120	375 000	375 000
2013	450 000	461 587	501 696	412 500	400 000
2014	480 000	503 130	521 357	457 500	470 000
2015	510 000	548 412	537 085	510 000	505 000
2016	540 000	597 769	549 668	570 000	560 000



La feuille distribuée propose cinq types de croissances (exemples fictifs de populations de cinq villes de 2008 à 2016).
Caractériser le plus précisément possible, en langage courant, ces cinq types de croissance.

<u>Deuxième temps</u> : travail par groupes de deux sur ordinateur.

Ouvrir le fichier « TP Types de croissance », et l'enregistrer dans votre espace personnel.

- Pour chacune des cinq villes, calculer l'écart d'une année à l'autre.
- Pour chacune des cinq villes, calculer le taux d'évolution d'une année à l'autre.
- Caractériser le plus précisément possible, en langage mathématique, ces types de croissances ; notez vos réponses sur une feuille.

<u>Troisième temps</u> : synthèse en classe.

Comparaison de ce qui a été fait dans le premier temps avec ce qui a été fait dans le deuxième temps.
Explications, compléments éventuels, débat.
Recherche de formulations le plus exactes possibles (au point de vue mathématique).

ANNEXE 2 (FICHE ÉLÈVE)

Vous disposez de trois documents, issus de sites Web.

Les deux premiers parlent de croissance exponentielle : vous devez relever, dans ces deux textes, les arguments qui confirment ou qui infirment le fait qu’il s’agit bien de croissances exponentielles.

Retour au sommaire

Dans le troisième, il y a beaucoup de pourcentages : la valeur de 10 000 % vous parait-elle plausible, ou n'est-elle destinée qu'à frapper le lecteur ? Les valeurs énoncées dans cet article vous incitent-ils à penser qu'il s'agit bien là d'une croissance exponentielle ?
Qu'en est-il en 2017 ?

Une croissance exponentielle pour OpenStudio

OpenStudio, éditeur de logiciel e-commerce, basé au Puy-en-Velay, a le vent en poupe. Voici quelques jours, nous annoncions que la petite entreprise locale connaissait un taux de croissance exponentielle de 2816% sur 5 ans, se hissant à la dixième position des entreprises françaises technologiques de croissance (…).

Pourquoi une telle croissance d'autant plus que la même société affichait déjà l'an dernier une progression mirifique. Elle était déjà lauréate en 2013 du FAST50 Deloitte avec 1635% de taux de croissance et s'était classée à la 21^{e} place au niveau national sans oublier qu'elle avait été déjà récompensée en 2012 avec les trophées de la CCI.

C'est en 2006 que l'aventure débuta. A l'époque, elle n'était pas promise à des lendemains enchanteurs, loin de là : "*J'ai débuté en 2006 en partant de zéro, dans ma maison à Saint-Pal de Senouire en créant des sites internet et des logiciels libres, ça a mis du temps à démarrer, j'ai vendu ma première prestation au bout de 8 mois, j'avais des revenus inférieurs au SMIC à l'époque*", explique Arnault Pachot, directeur de la start-up.

Source : http://www.leveil.fr/haute-loire/Une-croissance-exponentielle-pour-OpenStudio-societe-ponote-de-logiciel-e-commerce-105585

EMISYS surfe sur la crise et enregistre une croissance exponentielle

Alors qu'EMISYS vient à peine de fêter ses 5 ans, l'entreprise de conseil et d'ingénierie, spécialisée en management de projets, enregistre un taux de croissance record... (+30 % de croissance en moyenne et +135 % en 2012) et un fort développement de la masse salariale (115 salariés en 2015).

Source : http://www.industrie-mag.com/article7356.html

L'avenir du Web

60 millions de personnes dans le monde avaient accès à Internet en juillet 1996, 90 millions en juillet 1997, 151 millions en janvier 1999. Le nombre d'internautes continue de croitre de plus de 10 % par mois et le trafic de 15 %... par mois !

En France, 22 % des foyers ont un équipement micro et 6 % ont un accès Internet. 25 000 sites web dans le monde en janvier 1996, 650 000 en janvier 1997, 1,2 millions en juillet 1997, et 2,8 millions en juillet 1998, soit une croissance de **plus de 10 000 % !**

Le chiffre d'affaires mondial généré par le secteur Internet, de 331 milliards de dollars, se situe à un niveau proche de celui de l'industrie automobile.

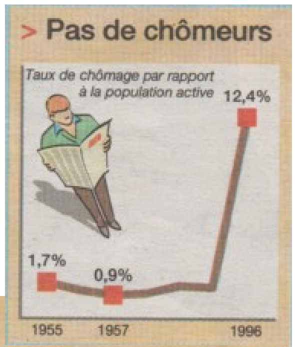
Le montant des transactions pour le commerce électronique est estimé à 140 milliards de francs en 1998; **et ce chiffre double chaque année**. En 1999, seulement 1,3 % des Français ont acheté via Internet alors que 9,6 % des Américains, 4,8 % des Suédois et 2,7 % des Britanniques réalisent des achats sur le réseau mondial ; mais on note, depuis le début de l'année 2000, une explosion du marché en France, qui place aujourd'hui notre pays dans les premiers rangs des grands acteurs de la "nouvelle économie".

Généralisation de l'accès à l'Internet dans les PME-PMI européennes... Se connecter à Internet entre de plus en plus dans les mœurs des PME ; aujourd'hui, près de 80 % des entreprises disposant d'ordinateurs sont connectées au réseau mondial.

Retour au sommaire

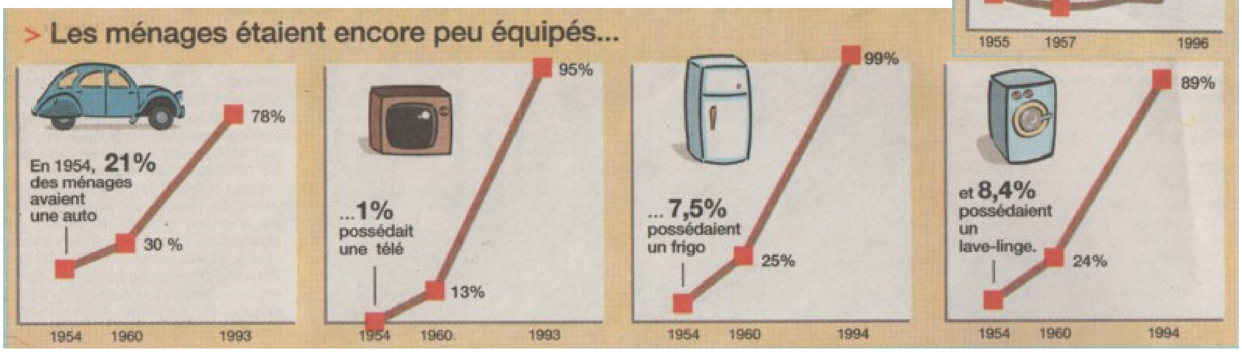
ANNEXE 3 (EXEMPLES D'EXERCICES D’APPLICATION)

Exercice 1



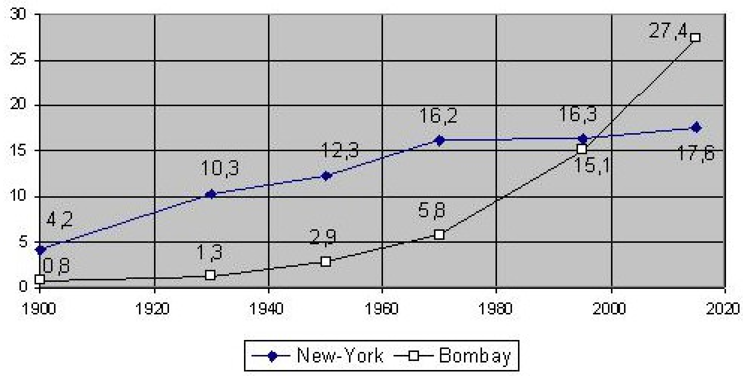
Parmi les graphiques ci-contre[3], lesquels vous semblent correspondre à une croissance linéaire ? quasi-linéaire ? exponentielle ? quasi-exponentielle ?

Justifiez « mathématiquement » vos réponses.



Exercice 2

Le graphique ci-dessous représente l’évolution de la population de New-York et de celle de Bombay. Les données sont en millions. Les données correspondent aux années 1900, 1930, 1950, 1970, 1995 et 2015. Pour 2015, il s’agit d’une estimation.



Il semble à première vue que la ville de Bombay ait une croissance exponentielle.
Calculer le taux annuel moyen de progression de sa population entre 1930 et 1950.
Calculer le taux annuel moyen de progression de sa population entre 1995 et 2015.
Conclure.

Note pour l’enseignant :
Le graphique correspondant à l’évolution de la population de Bombay amène les élèves à dire qu’il s’agit d’une croissance exponentielle. On saisit donc cette occasion pour faire calculer le taux « moyen » de croissance annuelle correspondant à deux périodes distinctes et montrer aux élèves que, dans cet exemple, le taux de croissance est plus fort dans la partie de la courbe où la pente est la moins forte : on fera expliquer les causes de cette illusion visuelle.

3 Extraits de « Les années 50 : la vie quotidienne de 1950 à 1959 », éditions Ouest-France, juillet 1996.

Retour au sommaire

Exercice 3 :

On a calculé le prix de divers objets placés dans un « Dépôt-Vente » ; ces objets perdent chaque mois 10% de leur valeur. Voici une copie de l'écran obtenu.

Objets			Table	Train	Console
		Prix initial :	**800,00 €**	**150,00 €**	**230,00 €**
au bout de	1	mois	720,00 €	135,00 €	207,00 €
au bout de	2	mois	648,00 €	121,50 €	186,30 €
au bout de	3	mois	583,20 €	109,35 €	167,67 €
au bout de	4	mois	524,88 €	98,42 €	150,90 €
au bout de	5	mois	472,39 €	88,57 €	135,81 €
au bout de	6	mois	425,15 €	79,72 €	122,23 €
au bout de	7	mois	382,64 €	71,74 €	110,01 €
au bout de	8	mois	344,37 €	64,57 €	99,01 €
au bout de	9	mois	309,94 €	58,11 €	89,11 €

1. Comment peut-on caractériser l'évolution de ces prix ?
2. Comment expliquer qu'il faut 7 mois (et non pas 5) pour arriver à la moitié du prix initial ?
3. Parmi les 3 algorithmes suivants quel est celui qui donne le premier mois pour arriver au quart du prix initial ?

Algorithme 1

Entrées	M nombre entier naturel
	P Nombre réel
Traitement	Demander à l'utilisateur la valeur de *p*
	M prend la valeur 0
	Tant que $p > 0{,}25 \times p$
	p prend la valeur $0{,}9 \times p$
	M prend la valeur M + 1
	Fin de Tant que
	Afficher M

Algorithme 2

Entrées	M nombre entier naturel
	P Nombre réel
Traitement	Demander à l'utilisateur la valeur de *p*
	M prend la valeur 0
	Tant que $p \leq 0{,}25p$
	p prend la valeur $0{,}9 \times p$
	M prend la valeur M + 1
	Fin de Tant que
	Afficher M

Retour au sommaire

Algorithme 3

Entrées	M nombre entier naturel
	p Nombre réel
Traitement	Demander à l'utilisateur la valeur de *p*
	M prend la valeur 0
	Tant que *p* > 0,25 x *p*
	p prend la valeur 0,9 x *p*
	Fin de Tant que
	Afficher M

4. Combien faudra-t-il de mois pour arriver au quart du prix initial ?
5. Combien faudra-t-il de temps pour que les objets coutent moins de 10 € ?

L'ESSAI DE MALTHUS (1798)

Une lecture de cet ouvrage pourrait également fournir matière à des exercices.
Il est disponible en intégralité (et libre de droits) sur
http://classiques.uqac.ca/classiques/maltus_thomas_robert/essais_population/principe_de_population.pdf
En voici quelques extraits, le premier concernant l'accroissement des populations :

Dans les États du nord de l'Amérique, où les moyens de subsistance ne manquent pas (...), pendant plus d'un siècle et demi la population a doublé en moins de vingt-cinq ans. Dans les territoires de l'intérieur, où l'agriculture était l'unique occupation des colons (...), la population a doublé tous les quinze ans.
Selon la table d'Euler, si l'on se base sur une mortalité de 1 sur 36 et si naissances et morts sont dans le rapport de 3 à 1, le chiffre de la population doublera en 12 années et 4/5. Ce n'est point là une simple supposition : c'est une réalité qui s'est produite plusieurs fois, et à de courts intervalles. Cependant, pour ne pas être taxé d'exagération, nous nous baserons sur l'accroissement le moins rapide, qui est garanti par la concordance de tous les témoignages.
Nous pouvons être certains que lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle double tous les vingt-cinq ans, et croît ainsi de période en période selon une progression géométrique.

Cet autre extrait concerne l'accroissement des ressources nécessaires à la subsistance des habitants :

Il est moins facile de mesurer l'accroissement des produits de la terre. Cependant, nous sommes surs que leur accroissement se fait à un rythme tout à fait différent de celui qui gouverne l'accroissement de la population (…). Lorsque tous les arpents ont été ajoutés les uns aux autres jusqu'à ce que toute la terre fertile soit utilisée, l'accroissement de nourriture ne dépendra plus que de l'amélioration des terres déjà mises en valeur. Or cette amélioration ne peut faire des progrès toujours croissants, bien au contraire.
(…) Supposons que grâce à une excellente administration, sachant donner de puissants encouragements aux cultivateurs, la production des terres double dans les vingt-cinq premières années (il est d'ailleurs probable que cette supposition excède la vraisemblance !). Dans les vingt-cinq années suivantes, il est impossible d'espérer que la production puisse continuer à s'accroitre au même rythme, et qu'au bout de cette seconde période la production de départ aura quadruplé : ce serait heurter toutes les notions acquises sur la fécondité du sol.

Il compare alors l'accroissement de la population et l'accroissement des ressources, et en tire les conclusions suivantes :

Comparons ces deux lois d'accroissement : le résultat est frappant. Comptons pour onze millions la population de la Grande-Bretagne, et supposons que le produit actuel de son sol suffit pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de vingt-deux millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir. Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population sera portée à quarante-quatre millions : mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que trente-trois millions d'habitants. Dans la période suivante, la population - arrivée à quatre-vingt-huit millions - ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre. A la fin du premier siècle, la population sera de cent soixante-seize millions, tandis que les

moyens de subsistance ne pourront suffire qu'à cinquante-cinq millions seulement. Cent vingt et un millions d'hommes seront ainsi condamnés à mourir de faim !
Considérons maintenant la surface de la terre, en posant comme condition qu'il ne sera plus possible d'avoir recours à l'émigration pour éviter la famine. Comptons pour mille millions le nombre des habitants actuels de la Terre. La race humaine croitra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256... tandis que les moyens de subsistance croitront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Au bout de deux siècles, population et moyens de subsistance seront dans le rapport de 256 à 9 ; au bout de trois siècles, 4096 à 13 ; après deux mille ans, la différence sera immense et incalculable.

Exemple de questions que l'on peut proposer à partir de ce texte.
1. On supposera, comme l'écrit Malthus, que la Grande Bretagne avait 11 000 000 d'habitants à l'époque où cet essai a été écrit, soit vers 1800. Malthus annonce qu'à la fin du siècle, la population serait de 177 millions ; ce résultat est-il conforme à l'hypothèse que fait l'auteur ? Si vous ne trouvez pas le même résultat que lui comment expliquez-vous la différence ?

2. Quelle aurait dû être la population en l'an 2000 ? Les chiffres fournis par l'U.E. annoncent 59 100 000 habitants au Royaume-Uni en 2000 : croyez-vous que l'hypothèse de Malthus soit plausible ? Comment Malthus justifie-t-il cette hypothèse ?

3. Déterminer (approximativement) le taux annuel de croissance de la population qui correspondrait à un doublement en 25 ans ? Comment doit-on procéder ?

4. Le taux moyen d'accroissement de la population du Royaume-Uni, sur la période 1995-2000, a été de 0,1 % par an. A ce rythme, Quel serait le pourcentage d'augmentation en 25 ans ? En combien d'années la population doublerait-elle, si ce taux était maintenu (on pourra se contenter d'une valeur approximative) ?

Pour information : Taux de croissance de la population (en % par an) :

Période	1970-1975	1975-198	1980-1985	1985-1990	1990-1995	1995-2000
Monde entier	1,95	1,72	1,72	1,72	1,48	1,2
Europe seule	0,6	0,49	0,38	0,44	0,16	-0,12

Source : Annuaire économique et géopolitique mondial

Image de couverture de la brochure « Dé-chiffrer par les maths »
(dessin de Pol Le Gall)

Retour au sommaire