

Quelques jeux sur graphes

Julien Bernat

Université de Lorraine (IECL - INSPE)

Journée régionale de l'APMEP - LORRAINE
mercredi 20 mars 2024

Plan de l'atelier

- ▶ jouer !!!
- ▶ un soupçon d'apports théoriques
- ▶ quelques considérations pédagogiques
- ▶ un peu d'histoire
- ▶ vos remarques !

Le chat et la souris

Un chat et une souris se trouvent dans un appartement.

Les pièces de l'appartement sont les petits ronds ; elles sont voisines (communiquent) si les petits ronds sont reliés.

Le chat se place en premier dans une pièce, puis la souris se place dans une pièce. Puis, à tour de rôle et en commençant par le chat, chaque animal **doit** se déplacer dans une pièce voisine.

Le chat gagne s'il attrape la souris. Si, au bout de 30 547 coups, le chat n'a pas attrapé la souris, la souris a gagné.

Voici plusieurs appartements : de A jusqu'à G.

Vous savez tout ce qu'il faut pour commencer à jouer : à vous !

Faites plusieurs parties en changeant les rôles, en notant à chaque fois qui a commencé et qui a gagné.

Chat et souris : premier retour

Est-il préférable d'être le chat ou la souris dans l'appartement A ?
Qu'en est-il dans les autres appartements ?

Plus généralement, voyez-vous des critères qui permettent d'affirmer qu'un appartement est favorable au chat ou à la souris ?

Chat et souris : premier retour

Est-il préférable d'être le chat ou la souris dans l'appartement A ?
Qu'en est-il dans les autres appartements ?

Plus généralement, voyez-vous des critères qui permettent d'affirmer qu'un appartement est favorable au chat ou à la souris ?

Cela vous a plu ? Poursuite de l'activité : maintenant, chaque animal **peut** se déplacer. Est-ce que cela change quelque chose aux résultats précédemment trouvés ?

Cadre théorique

- ▶ jeu à deux joueurs
- ▶ jeu déterministe (pas de hasard)
- ▶ jeu asymétrique (objectifs différents)
- ▶ jeu combinatoire (nombre fini de possibilités)
- ▶ jeu à information parfaite (tout est connu des deux joueurs)

Chaque animal doit jouer = variante active.

Chaque animal peut jouer = variante passive.

Discussion - résolution (chat et souris)

Ce qui ne fonctionne pas (du moins, pas toujours) : la distance.

Il n'est pas vrai que la souris doit toujours tenter de s'éloigner !

Il n'est pas vrai que le chat doit toujours tenter de se rapprocher !

Appartement A : si la distance entre les deux animaux est maximale en début de partie, le chat gagne.

Appartement B : si le chat "fonce" sur la souris, il ne l'attrape pas.

Discussion - résolution (chat et souris)

Quelques cas particuliers : les arbres (chat gagne), les graphes complets (chat gagne), les cycles (souris gagne si $L \geq 4$).

Résultat 1 : si la souris gagne dans une version active, elle gagne aussi dans une version passive (lorsque le chat passe son tour, elle fait de même).

Discussion - résolution (chat et souris)

Échappatoire pour la souris : un sommet qui lui permet toujours de fuir ($\exists x, \forall y, 1 \leq d(x, y) \leq 2 \Rightarrow \exists z, d(x, z) = 1 \wedge d(y, z) \geq 2$).

(dès que le chat est trop près, la souris reste à distance de sécurité).

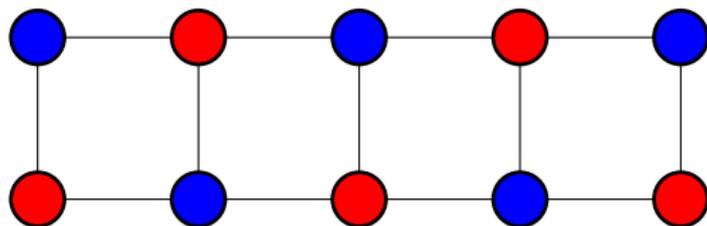
Mais il est possible que la case de fuite ne soit pas une échappatoire.

Résultat 2 : s'il existe un cycle ($L \geq 4$) formé d'échappatoires, alors la souris gagne.

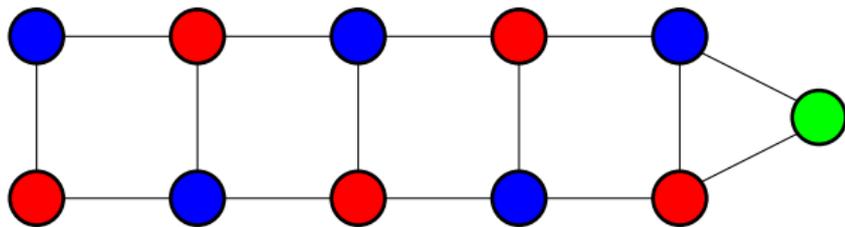
Discussion - résolution (chat et souris)

Notion de graphe coloriable : on colorie les sommets de sorte que deux sommets voisins ne soient pas de la même couleur.

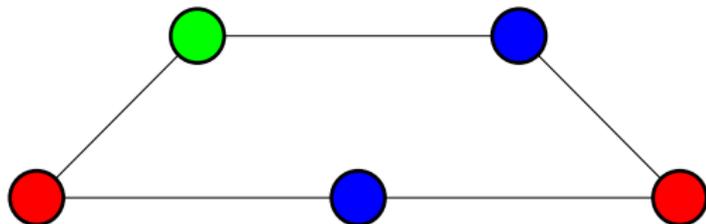
Résultat 3 : si le graphe est bicoloriable et si chaque sommet possède au moins deux voisins, alors la souris gagne.



Appartement A



Appartement B



Appartement F

... ce n'est pas une condition suffisante !

Discussion - résolution (chat et souris)

Piège : $\exists x, \exists y, x \neq y \wedge \forall z, d(y, z) \leq 1 \Rightarrow d(x, z) \leq 1$.

Si la souris dispose d'une stratégie gagnante, il existe une stratégie gagnante pour elle qui ne passe pas par un piège.

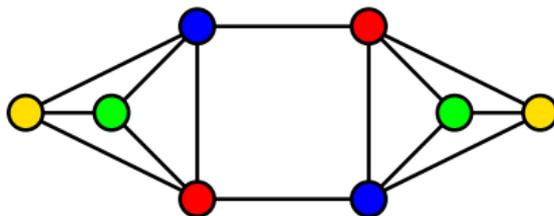
Graphe rétractable : on retire un à un les pièges (dans un ordre quelconque) jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul sommet.

Résultat 4 : dans la version passive, le chat gagne **si et seulement si** le graphe est rétractable.

Discussion - résolution (chat et souris)

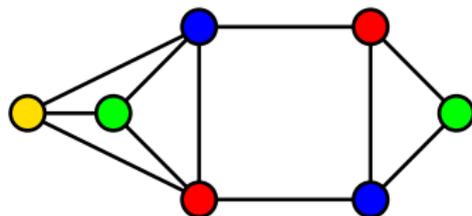
Résultat 5 : s'il existe une coloration du graphe et un isomorphisme de graphe qui préserve les couleurs et ne fixe aucun sommet, alors la souris gagne.

La démonstration repose sur la symétrie (cases conjuguées : la souris joue sur un sommet qui est de la même couleur que celui sur lequel se trouve le chat).

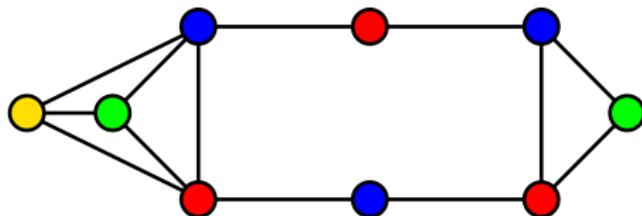


La souris gagne, elle peut garder la couleur du chat.

Discussion - résolution (chat et souris)



Le chat gagne (il se place sur jaune puis prend la couleur de souris).



Bien qu'elle perde la couleur du chat, la souris gagne.

Variantes possibles de l'activité

Il y a énormément de choix :

- ▶ le chat se pose après la souris (pas au même endroit !),
- ▶ il y a plusieurs chats, le camp des chats n'en déplace qu'un seul à chaque tour de jeu,
- ▶ des emplacements sont réservés pour un animal,
- ▶ la souris dispose d'un sommet gagnant (trou de souris),
(→ *partie nulle en cas de répétition ?*)
- ▶ graphe orienté : on ajoute des sens uniques,
- ▶ autres : vitesses de déplacement, visibilité des joueurs, évolution du graphe au cours du temps (incendie), ...

Un peu d'histoire

Problèmes plaisans et délectables : Bachet de Méziriac (1612).

Problème de déplacement du cavalier : ..., Ozanam (1694), Euler (1766), ...

Problèmes, énigmes, puzzles, "récréations" : Lucas, Loyd, Dudeney (problème 78 : Catching the Hogs) ; Gardner.

Nim et variantes : Bouton (1901), Wythoff (1907), Sprague (1936).

Bibliographie et ressources

Jeux de l'IREM de Lyon.

Jeux sur graphes répertoriés par jeux mathématiques de Belgique (site de Joëlle Lamon).

Les graphes - Expérimentation avec des élèves de collège
Nathalie Daval, IREM de La Réunion

Raconte-moi une Nimstoire.

Travaux d'Annick Schmitgen, d'Éric Duchene.

Jeux et graphes - La théorie des graphes de 5 à 95 ans (Alain Busser).

Autres jeux de graphe (sur plateau)

(Il en existe trop !)

Jeu symétrique : [le moulin](#).

Jeux asymétriques

Captures ([Fox games](#) - [Jeux du renard](#)).

[Le jeu de Bagh Chal](#) (tigres et chèvres).

Blocage ([Hare games](#) - [Jeux du lièvre](#) ; [Bear games](#) - [Jeux d'ours](#)).

[Le jeu de l'ourson](#) ([MathémaTICE](#)).

Sur le jeu du chat et de la souris

Noms usuels : Cop and Robber game ; pursuit-evasion game ; chaser-runner game.

A war puzzle game (*Amusements in mathematics*, Dudeney, 1917).

Quilliot (1978) ; Nowakowski et Winkler (1983) ; Aigner et Fromme (1984).

The game of cops and robbers on graphs (Bonato et Nowakowski, 2011).