LE PETIT VERT

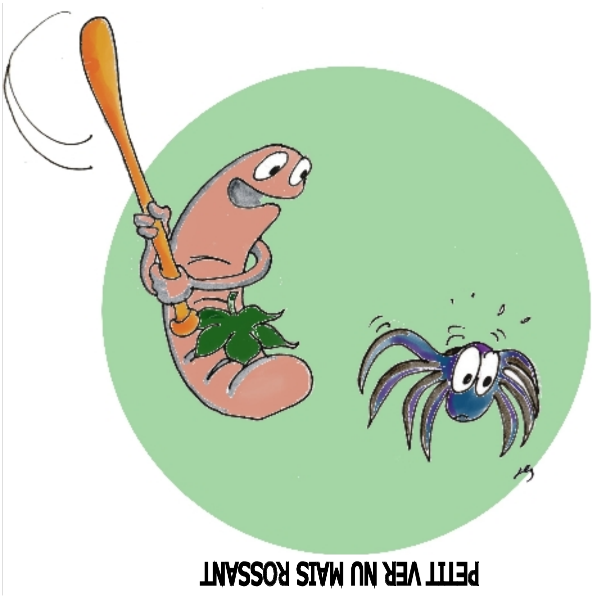
ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA RÉGIONALE LORRAINE DE L'A.P.M.E.P.

N° 100	DECEMBRE 2009

pachak 100 hundra 100 chint 100 hundert

centum 100 hundred 100 honderd 100



njëqind 100 cent 100 sută 100 yüz 100 céad

céad 100 cínt 100 kant 100 ehun 100 cem

http://apmeplorraine.free.fr

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale Lorraine A.P.M.E.P..
Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il paraît quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).
Son but est d'une part d'informer les adhérents Lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges entre les adhérents.
On y trouve un éditorial (généralement rédigé par un membre du Comité) et diverses annonces, les rubrique "problèmes", "dans la classe", "maths et médias", "vu sur la toile", et parfois une "étude mathématique". Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article, et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à
jacverdier@orange.fr et Christophe.Walentin@wanadoo.fr

Réadhésion 2010

Vous avez reçu, avec le dernier BGV, votre bulletin de réadhésion à l'A.P.M.E.P. Si ce n'est déjà fait, n'attendez pas pour le remplir : n'oubliez pas que si vous retournez votre chèque avant le 31 décembre, 66 % du montant (*) seront déduits de votre impôt sur les revenus de cette année. Une réadhésion à 48 € (indice inférieur ou égal à 415) ne vous coûtera en réalité **que 20 €**, une réadhésion à 75 € (indice supérieur à 415) vous coûtera **39 €** ; sommes minimes eu égard aux services rendus. Mais vous pouvez même faire beaucoup mieux : opter pour une cotisation « de soutien » (un soutien au tarif de 120 €, par exemple, ne vous coûtera que 54 €, mais rapportera 120 € à l'association).

Faites également adhérer vos collègues et amis (la première adhésion est au tarif de 45 €, qui n'en coûtent que 15 compte tenu de la réduction fiscale).

(*) la réduction fiscale ne porte que sur la part « adhésion » de la cotisation, pas sur les abonnements.

retour sommaire

SOMMAIRE

retour sommaire

édito

C'est le nombre de numéros du Petit Vert depuis sa création. C'était hier… il y a à peine 25 ans. Un comité renouvelé et rajeuni envisageait de créer un bulletin lorrain : « *Est-ce que ça vaut le coup de se lancer dans la grande aventure de la publication d'un bulletin régional APMEP ? Est-ce qu'on en a les moyens ? Y aura-t-il des articles en nombre suffisant ?* » (extraits du n°1 de mars 1985).

Les premiers numéros étaient réalisés avec de véritables 'couper-coller', à l'aide d'une paire de ciseaux et un tube de colle. La plupart des textes étaient déjà composés et imprimés à l'ordinateur, mais agrandis ou réduits à la photocopieuse pour qu'ils rentrent dans le cadre imparti ; certains étaient encore manuscrits. Les premiers 'Petit Vert' étaient même imprimés sur papier vert de la première à la dernière page.

On en a tiré ainsi jusqu'à 600 par numéro (il y avait plus d'adhérents qu'actuellement, mais beaucoup d'exemplaires étaient utilisés pour la « propagande ») : une petite équipe allait chercher les rames imprimées en offset à l'IREM, et faisait la chaîne autour d'une table pour assembler, plier et mettre sous enveloppe… C'étaient des moments fort conviviaux, qui se terminaient par le café et les gâteaux !

Quasiment un quart de siècle s'est écoulé…

La version imprimée est maintenant réduite à peu d'exemplaires : le PDF a supplanté le papier. Non pas pour des raisons écologiques, mais pour de basses questions financières : nous n'avions plus droit au tarif de presse (CPPAP) très avantageux, et les finances de la Régionale ne pouvaient plus supporter le coût des timbres et de l'imprimerie… Vous y avez gagné la couleur ! En outre, grâce au site de la régionale, pratiquement tout ce qui a été publié dans le 'Petit Vert' depuis ses débuts est désormais consultable en ligne.

La plupart d'entre vous qui lisez cet édito êtes assis devant l'écran de votre ordinateur. Vous avez donc devant les yeux la réponse aux questions posées il y a 25 ans. Nous comptons sur vous non seulement pour continuer à alimenter les diverses rubriques de ce 'Petit Vert' (et en particulier celle qui concerne les activités en classe), mais aussi pour rallier à l'APMEP nombre de vos collègues qui ne la connaissent pas, ou qui hésitent encore à adhérer.

Jacques VERDIER

N.d.l.r. L'image « 100 » ci-dessus est tirée de la couverture de « Récréation Québec », Publication officielle de la Fédération québécoise des jeux récréatifs.

retour sommaire

TOUT SAVOIR

100

(rébus)

Dans ce numéro « spécial 100 » vous allez découvrir bon nombre d'activités, de graphiques, d'informations diverses, en rapport plus ou moins étroit avec ce nombre 100.
Et tout d'abord, commençons avec ces pages de propriétés arithmétiques. Nous vous laisserons ensuite le plaisir de glaner de-ci de-là, au fil des pages, d'autres propriétés…

Le comité de rédaction

- Carré de 10 : 10^2 = **100**. Les Pythagoriciens considéraient que 100 est un nombre divin car il est le carré de la divine décade.
- Somme des dix premiers entiers impairs : 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = **100**
- Somme des neuf premiers nombres premiers : 2+3+5+7+11+13+17+19+23 = **100**
- Somme de deux nombres premiers : 47 + 53 = **100**
- Produit de deux sommes de carrés : $(1^2+1^2)(1^2+7^2)$, $(1^2+1^2)(5^2+5^2)$, $(2^2+1^2)(2^2+4^2)$, $(1^2+3^2)(1^2+3^2)$.
- Différence de deux carrés : $100 = 26^2 - 24^2$ (c'est la seule, non triviale, possible)
- Carré de la somme des quatre premiers entiers : $(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 100$
- Somme des cubes des quatre premiers entiers naturels : $1^3+2^3+3^3+4^3$ = **100**
- Somme du 6^e^ et du 8^e^ carré : 36+64 = **100**
- Somme du 9^e^ et du 10^e^ nombres triangulaires : 45+55 = **100**
- Divisible par le nombre de nombres premiers qui lui sont inférieurs (25).

retour sommaire

- Un nombre **abondant** (c'est-à-dire strictement inférieur à la somme de ses diviseurs stricts). Les premiers nombres abondants sont : 12, 18, 20, 24, 30, 36…

- Un **nombre Harshad** (ou nombre de Niven), car il est divisible par la somme de ses chiffres : 1 + 0 + 0 = 1 (les premiers nombres de Harsad sont 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48 …) ; question ouverte : tout nombre entier supérieur à 2 peut-il s'écrire comme somme de deux nombres Harshad ?

- Un nombre **anticoïndicateur**, c'est-à-dire un entier positif n qui ne peut pas être exprimé comme la différence entre un entier positif x et le nombre des entiers inférieurs à lui et premiers avec lui. Exprimé algébriquement, l'équation $x - \varphi(x) = n$, où x est l'inconnue, et φ représente la fonction indicatrice d'Euler, ne possède pas de solution. Les premiers nombres anticoïndicateurs sont : 10, 26, 34, 50, 52, 58, 86, 100, 116, 122, 130, 134 …

- Le nombre de diviseurs de 45 360.

- $100 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56}$ (il y a en tout 136 décompositions de 100 en fractions égyptiennes, c'est-à-dire de numérateur 1).

- S'écrit en utilisant les 9 chiffres (dans l'ordre !) : 100 = 123 – 45 – 67 + 89.

- S'écrit en n'utilisant que des 3 : 100 = 33´3 + 3/3.

- Somme des 20 premières décimales de *π :*
(*π* ≈ 3,14159 26535 89793 23846 26433).

retour sommaire

Centenaire de l'A.P.M.E.P.

A l'occasion du centenaire de notre association, notre exposition itinérante : « **Objets Mathématiques** » a été traduite en allemand et sera présentée pour la première fois en version bilingue à la médiathèque de Sarreguemines du mardi 19 au samedi 23 janvier 2010 aux heures d'ouverture de la médiathèque (http://www.mediatheque-agglo-sarreguemines.fr/horaires.html).

Cette exposition, basée sur la manipulation d'objets, permet de chercher, de faire conjecturer, de se convaincre et de convaincre ses interlocuteurs de la pertinence des résultats obtenus. Destinée à l'origine à des élèves de collège, cette exposition a également été mise à profit par des élèves de cycle III de l'école élémentaire, ainsi que par tout public souhaitant passer un moment ludique à jouer à « faire des mathématiques »

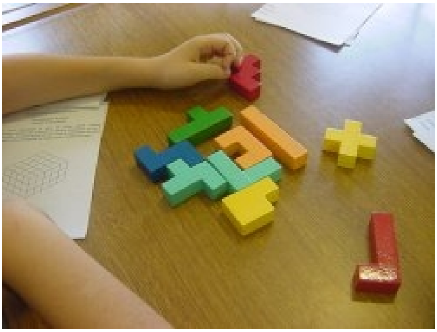
Nous vous rappelons que quatre exemplaires peuvent circuler dans les quatre départements lorrains. Une modique somme (10 €) est demandée comme participation à son entretien et sa rénovation. La durée du prêt n'est pas limitée, cependant une durée d'une ou deux semaines semble être la durée habituelle.

Si vous souhaitez emprunter une version de l'exposition « Objets mathématiques », contactez :

Pour la Meurthe-et-Mlle : André STEF (Andre.Stef@iecn.u-nancy.fr)
Pour la Meuse : François DROUIN (francois.drouin2@wanadoo.fr)
Pour la Moselle : Michel RUIBA (michel.ruiba@ecopains.net)
Pour les Vosges : Marie José BALIVIERA (baliviera.mj@wanadoo.fr)

Des compléments pourront être trouvés dans le coin « jeux » du site de la Régionale : http://apmeplorraine.free.fr

retour sommaire



TOUT SAVOIR

100

Un carré magique de 100 cases :

49	37	25	13	1	99	87	75	63	51
60	48	36	24	12	10	98	86	74	62
61	59	47	35	23	11	9	97	85	73
72	70	58	46	34	22	20	8	96	84
83	71	69	57	45	33	21	19	7	95
94	82	80	68	56	44	32	30	18	6
5	93	81	79	67	55	43	31	29	17
16	4	92	90	78	66	54	42	40	28
27	15	3	91	89	77	65	53	41	39
38	26	14	2	100	88	76	64	52	50

retour sommaire

Journée régionale du 17 mars 2010

Notre Journée régionale aura lieu **à Vandœuvre-les-Nancy**. La conférence du matin et l'assemblée générale auront lieu à l'INRIA (campus scientifique de Vandœuvre, face à l'IREM). Le repas de midi, ainsi que les ateliers et groupes de débat de l'après-midi se dérouleront au lycée Jacques Callot, tout proche.

Le programme détaillé et les modalités d'inscription seront envoyés début janvier à tous les adhérents, et dans tous les établissements de l'académie.

Conférence :

Conférence de Bruno LEVY (de l'INRIA). *Un outil géométrique : la première forme fondamentale ; de Riemann à la simulation numérique.*
Dans cette conférence, nous nous intéresserons à la première forme fondamentale (également appelée tenseur métrique) : un outil permettant de mesurer longueurs et angles sur des surfaces non planes. La conférence commencera par une présentation de quelques notions de géométrie différentielle, pour ensuite en décliner plusieurs applications au graphisme 3D et à la géométrie numérique, illustrées par des démonstrations des logiciels développés par l'équipe de recherche ALICE.

Ateliers pévus :

- Labyrinthes.
- Brochure « Jeux École ».

  (Les deux ateliers ci-dessus seront réservés en priorité aux professeurs d'école en cours de formation continue).
- Inclure l'algorithmique dans notre pédagogie.
- Algorithmes et programmation.
- Algorithmique en classe de seconde.
- Symétries orthogonales et centrales dans le plan et l'espace.
- Tétraèdres euclidiens à faces isométriques.
- Compas'nimaux.
- Figures impossibles en 2D et 3D.
- Calcul mental et géométrie en sixième.
- Constructions géométriques par pliage de papier.
- Les mathématiques : inspiration pour la poésie.
- GeoGebra.
- Utiliser les polyminos en classe.
- Tableau blanc interactif en maths. Etc.

En outre, des débats sont prévus (en fonction de l'actualité), soit en A.G. le matin, soit en petits groupes l'après midi. Exemples possibles : l'évaluation en cours de formation, la réforme du Lycée, la masterisation de la formation, le socle et son évaluation…

retour sommaire

IMPRESSIONS DE ROUEN

Après l'expérience de deux Journées régionales à Nancy, je me suis décidé à aller participer cette année aux Journées nationales de l'APMEP à Rouen.

Tout d'abord l'accueil était chaleureux et les lorrains étaient au rendez vous. Ils étaient venus en masse et ont occupé la cafeteria dès le début… Le temps était au beau fixe. Le problème majeur pour moi a été le choix des ateliers vu les propositions aussi alléchantes que variées.

Après la cérémonie d'ouverture des journées nationales, j'ai assisté à la séance plénière de Jean-Pierre KAHANE intitulée « La science, les lumières et les ombres, le cas des mathématiques financières » sur la crise et les maths. Il était notamment question de répondre à l'attaque de l'ancien premier ministre M. Rocard sur notre présumée part de responsabilité en tant que mathématiciens dans le déclenchement de la crise !

Dimanche après-midi, un créneau horaire était réservé afin que toutes les délégations régionales puissent se réunir. Nous étions nombreux !! Environ 30 participants pour la Lorraine !!! Plusieurs points étaient à l'ordre du jour. De l'extérieur on aurait pu croire que notre délégation était juste un groupe de gens qui discutaient de tout et de rien… Mais les apparences sont trompeuses, et des décisions importantes ont été prises pour la suite…

Le soir nous avons décidé de rester entre lorrains et nous nous sommes retrouvés dans un restaurant. Même s'il n'était pas étoilé, le repas était très bon !!!! C'était très convivial. L'ambiance était assez folklorique : imaginez juste vingt-huit personnes qui parlent de tout mais aussi de mathématiques. Certains même faisaient des exercices de maths sur leurs serviettes, d'autres sortaient leur calculatrice de leur sac pour faire des simulations. Un repas normal de professeurs de mathématiques en somme !

Le plus touchant pour moi est lorsque que l'on a parlé de tous les soucis dans l'enseignement des mathématiques. J'ai apprécié de ne pas entendre toujours les mêmes discours des professeurs, sur la discipline et l'investissement des élèves… c'était très intéressant.

Au final, j'ai vécu un bon moment à ces journées nationales de l'APMEP et c'est une expérience que je vous recommande fortement. Je vous donne donc rendez-vous à Paris, à Grenoble, à Nancy-Metz pour des prochaines éditions de ces journées… In cha Allah.

Anas MTALAA

retour sommaire

DANS NOS CLASSES

En 2010, poursuivons la « connaissance intime des entiers inférieurs à 100 » par le jeu

François DROUIN (IUFM de Lorraine, site de Metz)

En décembre 2006, dans le Petit Vert n° 88, un article évoquait déjà « cette connaissance intime des entiers inférieurs à 100 par le jeu ». Il est téléchargeable sur le site de la régionale dans la rubrique « Activités en classes ».
Depuis cette date, Jeux 8 est paru, mais surtout, les programmes ont changé au collège en 2009 et principalement à l'école élémentaire en 2008. L'écrit devait être réactualisé.

Au cycle 2, dans les programmes 2008 :

Au Cours Préparatoire, l'ensemble de la partie « Nombres et calculs » concerne les entiers naturels inférieurs à 100.

> *- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.*
> *- Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 (« table d'addition »).*
> *- Comparer, ranger, encadrer ces nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.*
> *- Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20.*
> *- Connaître la table de multiplication par 2*
> *- Calculer mentalement des sommes, des différences, des opérations à trous. Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100).*
> *- Résoudre des problèmes simples à une opération.*

Au C.E.1, les élèves doivent connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers inférieurs à 1000. Pour ceux qui sont inférieurs à 100, il reste à travailler :

> *- Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.*
> *- Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10.*
> *- Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant.*
> *- Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5.*
> *- Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits.*
> *- Calculer en ligne des suites d'opérations.*
> *- Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre.*
> *- Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier).*

retour sommaire

Quelques remarques à propos des programmes de cycle 2 :

Les « tables d'addition » sont considérées comme les décompositions additives des nombres inférieurs à 20. Elles incitent à aller un peu plus loin que les seules égalités du type « 8 + 9 = 17 » pour travailler avec des égalités telles que 18 = 13 + 5. Concernant les « tables de multiplication », il n'est pas fait référence à des « décompositions multiplicatives » de nombres inférieurs à 50.

Au C.E.1, il n'est dit d'utiliser les nombres inférieurs à 1000 que pour les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction.

Au cycle 3, dans les programmes 2008 :

Au C.E.2, on travaille avec les nombres entiers naturels jusqu'au million. Pour ceux inférieurs à 100, il reste à travailler :

> *- Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié et demi, triple, quart d'un entier naturel.*
> *- Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60.*

Au C.M.1, on travaille avec les nombres entiers naturels jusqu'au milliard. Pour ceux inférieurs à 100, il reste à travailler :

> *- La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.*

Au C.M.2, il est demandé :

> *- Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs.*
> *- Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.*

Quelques remarques à propos des programmes de cycle 3 :

Au C.E.2, les élèves doivent connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million et au C.M.1. jusqu'au milliard. Il n'est à aucun moment évoqué l'utilisation de ces nombres. Ils sont d'ailleurs très rarement utilisés : dans les médias, il a été évoqué 15 cents délégués à la convention d'un parti politique, 5 milliards d'Euros pour la perte d'une banque, 63 millions d'habitants en France. L'informatique nous a habitués aux kilooctets et Mégaoctets, naguère étaient évoqués des salaires en kilofrancs… Des changements d'unités interviennent et les « grands nombres » sont utilisés avec des « valeurs numériques » inférieures à 100. Ce changement d'écriture sera repris plus tard au collège lors des rencontres avec les écritures scientifiques. Les millions et les milliards seront repérés à l'aide des exposants des puissances de 10 des écritures scientifiques.

Le travail demandé à propos des « fractions simples » est en lien direct avec la division euclidienne. Numérateurs et dénominateurs de ces « fractions simples » seront très certainement le plus souvent des entiers naturels inférieurs à 100.

retour sommaire

Au collège, dans les programmes 2009 :

L'étude des écritures fractionnaires se poursuit. Additions, soustractions, multiplications, divisions, sont abordées. Numérateurs et dénominateurs seront également le plus souvent des entiers naturels inférieurs à 100.
Les décompositions multiplicatives de ces entiers sont utilisées également utilisées lors des simplifications de fractions ou de transformation d'écritures utilisant des radicaux.
Nous rencontrons de nombreux élèves peu à l'aise dans ces décompositions d'entiers qui nous semblent simples…

Derrière l'expression « connaissance intime des entiers inférieurs à 100 », nous pouvons imaginer la connaissance de diverses décompositions additives, multiplicatives, alliant multiplication et addition ou soustraction.

<u>Par exemple</u>

$60 = 30 + 30$

$60 = 25 + 35$

$60 = 90 - 30$

$60 = 5 \times 12$

$60 = 4 \times 6 + 6 \times 6$

$60 = 100 - 4 \times 10$

$60 = 7 \times 8 + 4$

$60 = 15 + 15 + 15 + 15$

60 est égal aux $\frac{2}{3}$ de 90

$\frac{60}{9} = 6 + \frac{6}{9}$

$\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$\sqrt{49} = 7$

Factoriser « $5x + 60$ » ou « $9x^2 + 48x + 64$ »

Dans des écrits A.P.M.E.P. :

En premier lieu, je ne peux que conseiller la relecture du précédent article (Petit Vert n° 88) sur ce thème téléchargeable sur le site de la régionale. Y étaient évoqués des jeux numériques repérés dans « Jeux 2 » (réédité en 2007 sous le titre « Comment faire du calcul un jeu d'enfant »), Jeux 5, Jeux 6 et Jeux 7. On y trouve également une utilisation en classe entière du jeu « Pas de problème » édité il y a quelque temps par les Éditions Armand Dujardin.

L'exploration de la rubrique « activités en classe » du site de la régionale permet de retrouver :

> « Opération Mathador », par Philippe Simonin, dans le Petit Vert n° 86, pour des liaisons C.M.2. – Sixième.
> « Bâtons de Neper », par Martine Dechoux, dans le Petit Vert n° 60, pour faciliter la compréhension des multiplications en sixième.

retour sommaire

« Des multiplications et des réseaux », par Anne Millet dans le Petit Vert n° 52, pour l'apparition de belles régularités lors de chaînes de multiplications.

Dans la brochure « Avec des Pentaminos » de l'A.P.M.E.P. Lorraine ; la décomposition des multiples de 5 inférieurs ou égaux à 60 sous la forme … X … + … X … ou … X … - … X … est évoquée.

En 2008, « Jeux 8 » est sorti… Vous y trouverez :

« Quatrido » : ce jeu va avoir le même succès que Trio (Ravensburger), présenté dans Jeux 5 et Jeux 6. Les nombres cibles sont compris entre 11 et 69, des pistes de recherche individuelles sont présentées.
Les « Qui suis-je ? » numéros 1, 2, 5 et 6 font travailler sur des décompositions d'entiers de 1 à 26.
Le « Puissance 4 » numéro 1 fait travailler les décompositions des entiers 10, 12, 24, 36, 40 et 50.
Les « Sudomaths » des feuilles 1, 2, 3, 5, 8 font travailler les décompositions des entiers compris entre 1 et 100.

Pour compléter vos lectures, voici deux jeux qui pourraient figurer dans une brochure « Jeu École » (le groupe « Jeux » national de l'A.P.M.E.P. travaille actuellement sur de telles brochures).

Dans ce premier carré, il s'agit de retrouver 10 carrés formés de quatre nombres dont le produit est 100.

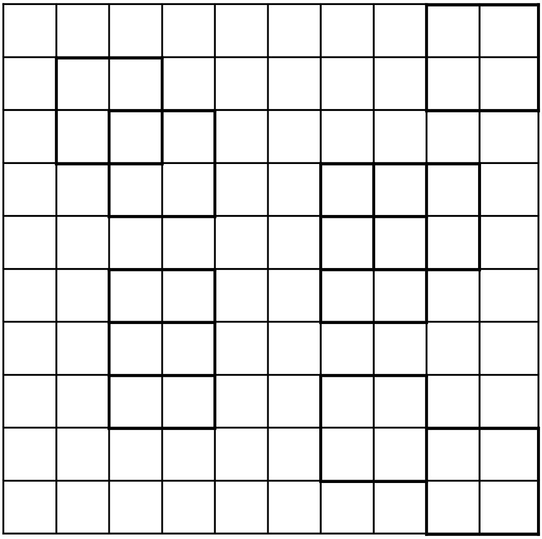
2	2	2	1	10	10	2	5	10	10
4	10	1	1	2	1	2	4	1	1
4	1	10	2	10	10	10	1	2	10
5	4	1	5	4	1	2	10	10	4
2	2	5	2	4	5	5	1	1	5
10	5	4	5	1	10	4	5	10	1
2	2	5	1	2	2	5	2	2	10
2	4	10	2	4	2	10	2	10	1
5	5	1	4	10	1	10	1	4	5
4	10	10	1	5	5	2	10	10	1

retour sommaire

Dans ce deuxième carré, il s'agit de retrouver 10 carrés formés de quatre nombres dont la somme est 100.

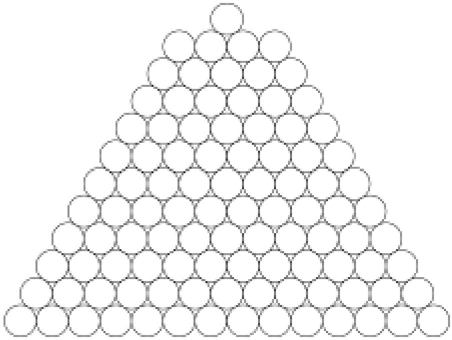
60	40	20	10	50	10	10	20	20	30
30	30	20	30	20	80	10	40	30	20
10	40	10	50	20	10	20	10	10	30
20	70	20	20	30	60	40	10	60	10
10	10	10	20	20	10	40	10	20	20
30	40	50	30	40	20	30	20	10	50
10	30	10	10	10	20	10	50	10	60
10	20	60	20	30	10	80	10	40	20
50	30	20	10	60	40	10	20	70	10
50	40	10	20	30	20	40	40	10	10

Pour ceux qui désireraient en créer d'autres, les deux carrés précédents ont été construits à l'aide la grille ci-dessous :



retour sommaire

Nombres triangulaires multiples de 100



91 et 105 sont des nombres triangulaires, mais 100 n'en est pas un. La figure ci-contre nous montre qu'il l'est « presque » !!!
Suite à cette boutade, François a émis l'idée de rechercher s'il existait des nombres triangulaires multiples de cent, ce qui revient à rechercher n tel que $n(n+1)/2 = k\times100$ (n étant le nombre « d'étages »).
Aussitôt, Jacques a bondi sur son tableur, et a trouvé que c'était vérifié pour $n = 24$, $n = 175$, $n = 199$, $n = 200$ et ainsi de suite avec une période de 200 (224, 375, 399, 400, 424…).
Restait à démontrer cette propriété « arithmétiquement », sans tableur ou autre « machine ». Voici la preuve proposée par Isabelle Dubois :

Nous cherchons donc les entiers n tels que $n(n+1) = 200k$, où n et k sont des entiers.

Première étape :
Si a est une solution, alors tous les nombres entiers de la forme $a + 200u$ (u entier) sont solutions.
En effet, $(a+200u)(a +200u+1) = a(a+1) + 200((2a+1)u+u^2)$: c'est un multiple de 200.
De même, si a est une solution, alors tous les nombres entiers de la forme $a-200u$ (u entier) sont solutions.
En effet, $(a-200u)(a-200u+1) = a(a+1) + 200(-(2a+1)u+u^2)$: c'est un multiple de 200.

Deuxième étape :
Il nous reste à chercher les solutions comprises entre 0 et 199. En effet, si a est une solution supérieure ou égale à 200, alors il existe u entier tel que $a - 200u$ est solution et inférieur ou égal à 199.
Avec un tableur ou un algorithme, on trouve : 0, 24, 175, 199.
D'où l'ensemble des solutions :
$200u$, $24+200u$,$175+200u$, $199+200u$, avec u entier.

retour sommaire

Remarque sur la deuxième étape :
Il est facile de voir que l'on peut se restreindre à chercher un entier n solution entre 0 et 199, et tel que n ou n+1 est multiple de 25 (ce qui restreint la recherche aux entiers 0, 24 ou 25, 49 ou 50, 74 ou 75, 99 ou 100, 124 ou 125, 174 ou 175, 199) !
En effet, puisque 200 ($= 2^3 5^2$) divise $n(n+1)$, alors 5^2 divise $n(n+1)$.
Or, on ne peut avoir 5 divise n et 5 divise n+1, d'où 25 divise n ou (exclusif) divise n+1.
De même, par un raisonnement identique, on voit que 2^3 divise n ou (exclusif) n+1.
Ainsi, il ne reste plus que : 0, 24, 175, 199.
Et voilà, plus aucune calculatrice ou ordinateur à utiliser !

Un bon exercice pour vos élèves ? L'arithmétique est au programme de terminale S, spécialité maths. Par ailleurs, les démonstrations proposées avant la remarque finale mettent en œuvre des connaissances d'un élève de seconde, et les démonstrations par disjonction des cas sont intéressantes à ce niveau. Si de plus il y a un petit coup d'algorithme ou de tableur pour trouver les premières solutions, c'est parfait en seconde.

TOUT SAVOIR 100

Cent est le premier nombre de la liste alphabétique de tous les nombres écrits en lettres (en français).

Voici les noms de nombres de la langue française classés par ordre alphabétique : ***Cent, Cinq, Cinquante, Deux, Dix, Douze, Huit, Mille, Milliard, Million, Neuf, Onze, Quarante, Quatorze, Quatre, Quinze, Seize, Sept, Six, Soixante, Treize, Trente, Trois, Un, Ving***t.
Il ne s'agit que des noms « simples ». Il y a un nombre énorme de noms composés, en principe infini (chaque élément de **N** devrait pouvoir être nommé, mais tous les mots nécessaires n'ont pas encore été inventés) ; en outre les noms des grands nombres ne s'emploient jamais sans déterminant (***un*** ***million***, ***un*** ***milliard***…).
C'est ainsi qu'entre ***Cent*** et ***Cinq***, il existe une multitude d'autres noms de nombres. Par exemple : ***Cent-deux***, ***Cent-dix milliards huit-cents millions trois-cent-onze-mille-deux-cent-dix-sept***, ***Cent-quatre-vingt-sept-mille-trente-neuf***, ***Cent-un,*** pour n'en citer que quatre (ici dans l'ordre alphabétique).
Si vous voulez vous amuser : écrivez tous les noms des nombres de 1 à 1 000 par ordre alphabétique, et dites-nous quel est le 500e !

TOUT SAVOIR
100

L'année 100

- Naissance de Justin de Naplouse, martyr chrétien, à Flavia Neapolis (actuelle Naplouse, Palestine). Il mourra à Rome, décapité en 165.
- Septembre : Pline le Jeune (61-114), orateur de premier plan, est nommé consul par l'empereur Trajan.
- Fondation de la colonie romaine de Timgad (Thamugadi) en Algérie. A été classée au patrimoine mondial de l'humanité par l'UNESCO en 1982.
- Trajan mène une politique destinée à restaurer l'ancienne suprématie économique de l'Italie. Dans l'Empire, il s'efforce de développer l'urbanisation et de surveiller les finances des municipalités. L'armée romaine, à son apogée, compte 300 000 hommes.
- Construction de la bibliothèque de Pantainos à Athènes.
- Décès de Quintilien, maître de rhétorique et pédagogue latin du I^{er} siècle ap. J.-C.
- Décès à Rome de Flavius Josèphe, historien juif de langue grecque, né en 37 à Jerusalem.

Citations et proverbes

- **Cent** ans après sa mort, le plus grand bonheur qui puisse arriver à un grand homme, c'est d'avoir des ennemis (*Stendhal*).
- S'il y avait une seule vérité, on ne pourrait pas faire **cent** toiles sur le même thème (*Picasso*).
- Tournez, tournez, bons chevaux de bois. Tournez **cent** tours, tournez mille tours (*Verlaine*).
- Si vous devez **cent** dollars à la banque, c'est votre problème. Si vous devez **cent** millions de dollars à la banque, c'est le problème de la banque (*John Paul Getty*).
- Pour faire un chêne **centenaire**, tu peux mettre tout l'engrais que tu veux, il faut **cent** ans... (*Patrick Bosso*).
- Il n'y a qu'une seule religion, bien qu'il y en ait une **centaine** de versions [There is only one religion though there are **hundred** versions of it] *(George Bernard Shaw*).
- **Cent** ans de chagrin ne payent pas un sou de dettes (*Proverbe*).

retour sommaire

- Vu une fois, cru **cent** fois (*Proverbe : on est porté à croire qu'une personne qui a commis une mauvaise action en a l'habitude*).

- Quand une vache blanche entre dans une étable, une vache blanche en sort **cent** ans après (*Proverbe du Cantal*).
- Qui dresse sa table est **cent** fois coupable; qui ne la dresse pas n'est coupable qu'une fois (*Proverbe persan*).
- Il n'y a point de roses de **cent** jours (*Proverbe chinois*).
- *Humour* : Un Belge a battu le record du **100** mètres : il a fait 101 mètres.

Dans la culture populaire, 100 est un nombre magique

- La guerre de **cent** ans (guerre qui dura en fait 116 ans : 1337-1453).
- Les **100** jours de Napoléon (du 19/03 au 18/06/1815, non compris).
- **100** ans de sommeil pour la Belle au bois dormant.
- Faire les **100** pas.
- Rouler (ou vivre) à **100** à l'heure.
- « Le vent des forêts » : **100** œuvres d'art au cœur de la Meuse.
- Le "Père **cent**" des **100** jours avant le bac (forme moderne du monôme).

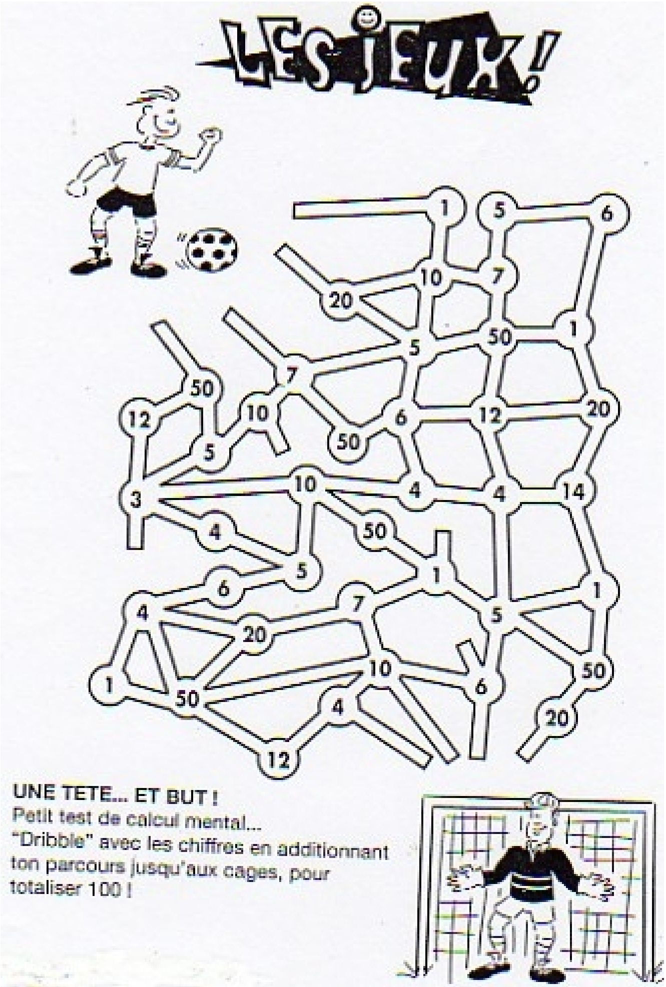
Pioupious fêtant le Père Cent

retour sommaire

TOUT SAVOIR 100

Un petit problème à propos d'un labyrinthe numérique

(François DROUIN)

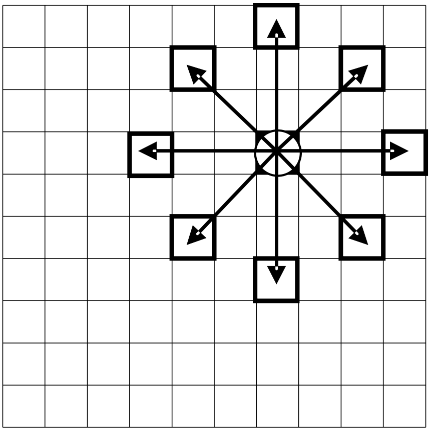


Une élève de sixième avait ce labyrinthe numérique dans son cahier de textes. L'ayant maintes fois utilisé en formation, j'ai remarqué qu'il y avait plusieurs solutions.

Qui parmi les lecteurs du Petit Vert et leurs élèves en trouvera le maximum ? Oublions la confusion trop fréquente « chiffre –nombre »…

retour sommaire

L'AMI ELTON, LE KANGOUROU

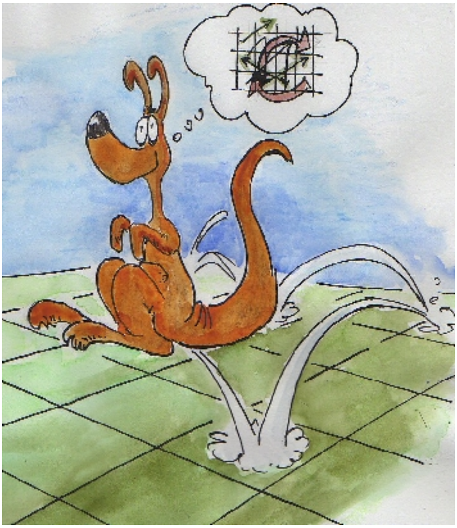


Au zoo de Raon-l'Étape vit l'ami Elton, un kangourou solitaire enfermé dans un enclos de 10 m sur 10 m (soit **100** m²). Pour tromper son ennui, il saute de case en case,

- soit de 3 m vers le nord, l'est, le sud ou l'ouest,
- soit de $2\sqrt{2}$ m vers le nord-est, le sud-est, le sud-ouest ou le nord-ouest.

Inlassablement, en **100** sauts, il revient à la case départ en ayant piétiné toutes les cases. Sauriez-vous retrouver un de ses circuits ?

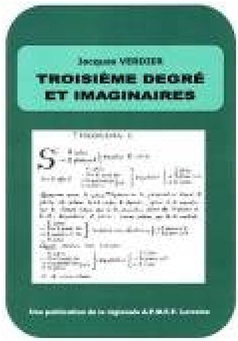
Ce problème figurait dans le Petit Vert n°20 de décembre 1989 (il y a tout juste 20 ans), et a donné lieu à de nombreux avatars et « rebondissements ». Dès que vous en aurez trouvé une solution, courrez jeter un œil aux pages 63 à 68 de la brochure *Les promenades d'Elton et autres récréations mathématiques*, ou sur notre site :
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=probleme (pb. n°20).

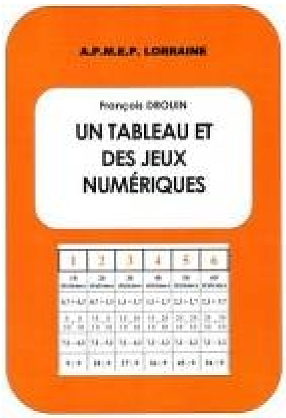


NOUVELLES BROCHURES

La régionale Lorraine a publié en octobre deux nouvelles brochures :

TROISIÈME DEGRÉ ET IMAGINAIRES
De Jacques Verdier, 90 pages A4. 7 €.
Étude historique sur la façon dont la recherche des solutions des équations du second puis du troisième degré a permis l'invention des nombres imaginaires. L'évolution du statut de ces nombres (l'énonciation du théorème fondamental de l'algèbre, sa démonstration, la structure de **C** comme clôture algébrique de **R**, et l'impossibilité de résoudre par radicaux des équations de degré supérieur à 5) et de la représentation géométrique des complexes.





UN TABLEAU ET DES JEUX NUMÉRIQUES
De François Drouin, 96 pages A4. 7 €.
Des tableaux permettant de réaliser divers jeux numériques utilisables en classe, en particulier dans les moments de « calcul rapide ». Dans une première partie, de nombreux tableaux prêts à être utilisés tels quels ; dans une seconde partie, des méthodes pour réaliser vos propres jeux, sur des thèmes ou contenus qui vous intéressent.
Les contenus mathématiques rencontrés correspondent à la fin du cycle 2 et au cycle 3 de l'école primaire, à la première année de collège et à la SEGPA.

Rappel des brochures précédentes :
MATHS & ARTS (avec C.D. inclus) ; AVEC DES PENTAMINOS ; LES PROMENADES D'ELTON ET AUTRES DISTRACTIONS MATHÉMATIQUES.
Toutes ces brochures sont à commander à APMEP-LORRAINE c/o André STEF, IREM de LORRAINE, Campus scientifique Paul Grignard, B.P. 70329, 54506 VANDŒUVRE CEDEX. Joindre chèque à l'ordre de APMEP-LORRAINE.
Coût : **7 €** pour chacune de ces brochures. Frais de port : 3,5 € pour une brochure, 5 € pour deux brochures, 7 € pour 3 à 6 brochures.

Elles sont également en dépôt-vente à l'I.R.E.M. de Lorraine (Fac. des Sciences, Vandœuvre), sans frais de port.

retour sommaire

MATH & MEDIA

Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à le faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.
Envois par la poste à Christophe WALENTIN, 17 Clos des Vignes, 57640 VRY, ou par courrier électronique à jacverdier@orange.fr et Christophe.Walentin@wanadoo.fr
Les archives de cette rubrique sont disponibles su notre site à l'adresse : http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=math_et_media

LOTO BULGARE

En Bulgarie, le 6 septembre et le 10 septembre 2009, lors de deux tirages du loto (le 3e tirage du 06/09 et le 3e tirage du 10/09, tirages cependant non consécutifs contrairement à ce qui a souvent été écrit), la même combinaison (4, 15, 23, 24, 35, 42) est sortie.
C'est un fait suffisamment rare pour que toutes les suspicions de tricherie aient circulé, malgré les dénégations véhémentes de l'organisme qui contrôle les tirages. On remarquera cependant qu'il n'y a eu aucun gagnant lors du 3e tirage du 06/09, alors qu'il y en a eu 18 lors du tirage suivant. Mais ceci ne prouve aucunement qu'il y ait eu tricherie : on pourrait en effet imaginer que, sur une population de quelques millions de joueurs, il y ait pu en avoir 18 qui se soient dit « *Ces numéros peuvent 'tomber', ils sont déjà sortis il y a peu, alors je les rejoue* ». En effet on a déjà pu constater, en France, que bon nombre de personnes jouent les numéros qui sont sortis le plus souvent dans les précédents tirages (ces numéros « *ont de la chance* »).

Par ailleurs, à supposer qu' « on » soit capable de tricher au loto bulgare, et de choisir quels numéros vont sortir, « on » n'aurait vraiment pas intérêt à faire sortir deux fois de suite les mêmes numéros, au risque de se faire repérer !

L'info précédente a beaucoup circulé sur le net, et dans bon nombre de blogs. D'autant plus que Mihail Konstantinov, un mathématicien bulgare (http://uacg.bg/pw/mmk/) avait indiqué que selon lui, **la probabilité d'une telle coïncidence était de 1 pour 4,2 millions**. D'où peut provenir cette valeur ?

retour sommaire

Il y a plusieurs façons de se poser la question de la probabilité d'une telle coïncidence.

1. La plus simple : on se place au 10 septembre (sachant que 4-15-23-24-35-42 est sorti le 06/09), et on cherche la probabilité p que ce tirage se produise ce 10/09. Cette probabilité est égale à $1/C(k,n)$, k étant le nombre de boules tirées (ici, $k = 6$) et n le nombre de boules dans l'urne ($n = 42$ pour ce tirage), ce qui donne $\boldsymbol{p = 1/5\,245\,786}$. Ce qui nous permet de dire que la probabilité 1 sur 4,2 millions (environ) annoncée par Konstantinov ne correspond pas à cette façon de voir.
D'où vient alors ce « 1 chance sur 4,2 millions » ? Le mystère reste entier. Peut-être s'agit-il d'une simple coquille ?

Précisions pour les curieux. D'après le site http://www.toto.bg/, il y a en Bulgarie trois lotos différents : le 'TOTO 2' (où l'on tire 6 boules sur 49), le 'TOTO 2 Joker' (où l'on tire 6 boules sur 42 + 1 joker), et le 'TOTO 2 seconde chance' (où l'on tire 5 boules sur 35). Il y trois tirages du 6/42 chaque jeudi et chaque dimanche (soit environ 625 par an). On peut retrouver les deux tirages en question sur http://www.toto.bg/index.php?lang=1&pid=32&sid=46 (tirages 2009/72 et 2009/73).

2. Une autre façon de se poser le problème : celle que Poincaré développe dans son « problème du tricheur à l'écarté » (utilisation de la formule de Bayes en probabilité). Soit T l'événement « L'organisateur est un tricheur », et A l'événement « Les 6 numéros sont tirés » ; on a vu que $p(A) = 1/5\,245\,786 = p$. On va supposer, pure hypothèse, que le « tricheur » ne triche qu'une fois sur 1000, pour éviter de se faire repérer trop facilement ! Comme nous sommes dans l'expectative la plus totale, nous allons supposer qu'il y a une chance sur deux pour que T soit vrai. A part p, vous pouvez modifier ces valeurs à votre convenance… Calculons les probabilités des 4 événements suivants :

$P(T \cap A) = (1/2)\times(1/1000)$ $\qquad P(T \cap \neg A) = (1/2)\times(99/1000)$
$P(\neg T \cap A) = (1/2)\times p$ $\qquad P(\neg T \cap \neg A) = (1/2)\times(1-p)$

Quelle est alors la probabilité que T soit vrai sachant que A s'est réalisé ? C'est donné par la formule de Bayes :

$$P(T|A) = \frac{P(T \cap A)}{P(T \cap A) + P(\neg T \cap A)} = \frac{1/2 \times 1/1000}{(1/2 \times 1/1000) + (1/2 \times p)} \approx 0{,}9998.$$

La conclusion semble s'imposer alors d'elle-même : on est quasi-sûr de la tricherie… Sauf que l'on se place ici dans l'optique de ce tirage précis (ici 4-15-23-24-35-42) qui se produirait à un moment précis (trois tirages plus tard que le premier).

retour sommaire

En ce qui concerne l'exemple du tricheur de Poincaré, on pourra lire le §97, p. 156-157 dans son « *Calcul des probabilités* », édition de 1912, en ligne sur Gallica (remplacer « grec » par « tricheur ») :
http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-29064
ou bien dans ce cours :
http://www.lyca.ch/~pfrache//archives/fichiers%20de%20cours/prob-causes-bayes.pdf

3. Il me semble cependant qu'on devrait se poser la question autrement, en prenant un peu plus de « hauteur », et en rupture avec la démarche de Poincaré : l'événement a eu lieu en Bulgarie, mais il aurait pu se produire dans un autre pays, à un autre moment, et on en aurait certainement été tout autant informé. Et on se serait posé la même question : hasard ou tricherie ?
Pour le seul loto 6/42 bulgare, il y a environ 625 tirages par an et autant pour le 6/49 et pour le 5/35 (avec pour ce dernier une probabilité p = 1/324 632 de tirer le gros lot), soit environ 1875 tirages par an. Pour le loto français 'ordinaire', il n'y a que trois tirages par semaine, soit environ 156 par an (avec p égal à environ 1 sur 2 millions).
Il doit bien y avoir 150 pays au monde où il y a un équivalent du loto. Mettons, « à la louche », 500 tirages par an. Avec une probabilité de gagner le gros lot de l'ordre du millionième (mettons une chance sur 2 000 000).

Cela fait quand même grosso modo 4 chances sur 100 que cela se produise quelque part… Ce n'est plus aussi rare que cela ! Et si cela se produisait effectivement quelque part dans une prochaine année, les media s'en feraient probablement encore l'écho… Et n'oublions pas qu'il ne s'agissait pas de tirages consécutifs, mais de tirages « proches » : si on étend la plage d'observation à plusieurs jours (deux fois le même tirage dans un certain laps de temps) la probabilité s'en trouvera considérablement augmentée.

Un événement de même nature se serait produit à un tournoi de Bridge en 1932, à Jersey (Australie) [source : New York Times du 11 jan. 1932] : une femme de 77 ans a reçu une main de 13 piques lors d'un tournoi de bridge (probabilité d'avoir 13 cartes de la même couleur : 4/C(13,52) = 1/158 753 389 900). Remarquons cependant que toute autre main définie par avance est d'égale probabilité !

retour sommaire

Comme le dit Georges Charpak : « ***Qu'un événement improbable <u>spécifié</u> se produise est hautement improbable. En revanche, qu'un événement improbable <u>quelconque</u> se réalise est fortement probable »*** (extrait de « *Devenez sorciers, devenez savants* »).

N.B. le blog sur lequel on trouve le plus de choses intéressantes au sujet de cette info est celui de Vicnent (si la page n'a pas changé d'URL au moment où paraîtront ces lignes) ; on y retrouve en particulier, dans le fil des commentaires, toutes les fautes de raisonnement que font nos élèves :

http://www.vicnent.info/blog/index.php?2009/09/17/1280-4-15-23-24-35-et-42-2-fois.

Merci à Thierry de la Rue (co-auteur de la conférence « *La loi des séries, hasard ou fatalité* ? » aux Journées de Rouen), Michel Henry et Pierre-Alain Muller pour les précisions qu'ils m'ont apportées sur ce sujet.

Jacques

(images tirés du site officiel de la loterie bulgare)




NOUVEL ARIEL

Depuis quelque temps, circule sur le net un diaporama, dont l'auteur semble être Peter Koltermann, de la société Kabel Deutschland GmbH (un opérateur allemand de câbles pour la télévision, l'internet et le téléphone).
Nous en avons extrait la « substantifique moelle » …
Voici deux flacons d'Ariel Color vus de face et de dos. A gauche, le « nouveau » flacon, à droite, « l'ancien ». La forme de la bouteille et les mentions portées sur les étiquettes sont différentes. Mais la composition du produit reste la même. Et le prix aussi.

retour sommaire

Regardons d'un peu plus près. Ce qui saute aux yeux, c'est que le nouveau flacon a une nouvelle forme et qu'il contient 10 % de produit en plus (ce qui correspond à une diminution prix du litre d'environ 9 %). Voilà une bonne affaire pour le consommateur !

Mais regardons la face avant d'encore un peu plus près : ce qui nous intéresse, c'est combien de lavages on peut faire avec chacun de ces flacons (l'ancien à gauche, le nouveau à droite) :

Il n'y a pas beaucoup d'amélioration… On se serait plutôt attendu à voir 20+2 lavages, non ? Mais l'indication du nouveau flacon laisserait supposer qu'on a gagné un peu plus de 10 % de lavages (ne pas oublier que le nouveau flacon a remplacé l'ancien dans les rayons, et que l'acheteur n'a aucun moyen, lui, de comparer sur place le nouveau à l'ancien).

Regardons maintenant, au dos des flacons, la quantité de produit (à gauche l'ancien, à droite le nouveau) :

retour sommaire

Cette fois, la surprise est de taille : **la quantité de produit a diminué** ! De presque 7 % !!! On est loin des 10 % de produit en plus.

Si on résume : même prix, volume moindre, même nombre de lavages (malgré le volume total diminué)… On avait dû mal traduire : les « 10 % de contenu en plus » devaient correspondre aux bénéfices encaissés par les actionnaires de Procter & Gamble. On prend vraiment le consommateur pour un con… (*ce n'est pas un gros mot, c'est une apocope*).

TOUT SAVOIR 100

La galaxie **M100 (Messier 100)** est l'une des plus brillantes de l'Amas de la Vierge.

retour sommaire

DANS NOS CLASSES

LE RETOUR DES ROSACES…

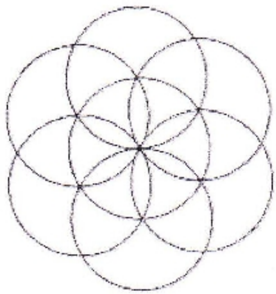
Audrey Leininger
IUFM de Lorraine – Site de Metz

Le travail présenté dans cet article a fait l'objet de la seconde partie de l'atelier « Rosaces » que j'ai animé lors de la Journée Régionale de l'APMEP du 18 mars 2009, lui-même inspiré du livre *La géométrie par le dessin au cycle III* de Claude Hameau (Nathan pédagogie).

Nous avions commencé avec des rosaces simples dans le PV 98… Nous allons à présent poursuivre avec des super-rosaces !!

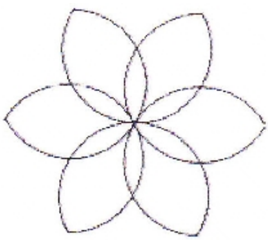
Super-rosaces et dodécagone régulier

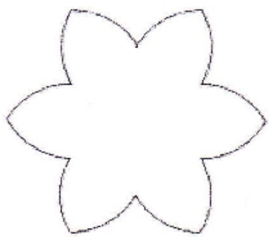
La **super–rosace** est l'expansion de la rosace simple. Ce thème, qui est l'occasion de faire découvrir les constructions géométriques simples aux élèves, requiert une certaine habileté de leur part.



Commençons comme une rosace banale : cercle, arcs de cercle. Mais au lieu d'arrêter le compas quand il atteint le cercle, laissons-le tourner autant qu'il peut tourner. Nous obtenons ainsi une super–rosace.

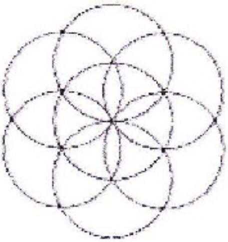
Comme pour la rosace ordinaire, effaçons certains de ses éléments afin d'en faire ressortir d'autres. Bien que « super », notre super-rosace n'en reste pas moins une rose. Mettons donc en évidence ses pétales ! Puisque ces pétales aussi sont « super », appelons-les des **super–pétales**.

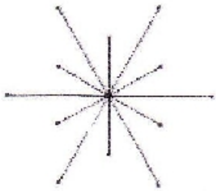




retour sommaire

Maintenant conservons uniquement les points d'intersection des cercles, puis joignons-les au centre.

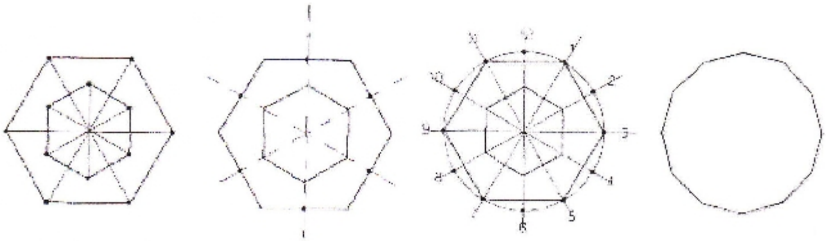




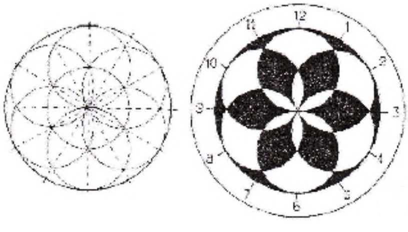
Deux séries de points apparaissent : elles correspondent aux points des pétales de la rosace et des super–pétales. Chaque série correspond aux sommets d'un hexagone régulier. Joignons-les de façon à obtenir des motifs intéressants (je vous laisse le soin de découvrir par vous-même des exemples de tels motifs…).

Traçons à présent les hexagones réguliers dont les sommets sont repérés par chacune des séries de points puis les axes de symétrie passant par des côtés de l'autre. Les axes d'une série partagent en deux parties égales les angles formés par les axes de l'autre série.

Quand nous traçons tous les axes, nous partageons le cercle en douze parties égales et nous traçons un **dodécagone régulier** !



Ah mais le dodécagone régulier peut être directement obtenu à partir de la super–rosace !



Bonne nouvelle pour tous les impatients !

Pour cela, traçons un grand cercle qui touche les cercles extérieurs de la super–rosace en un seul point, puis repérons les intersections de ce grand cercle avec les axes.

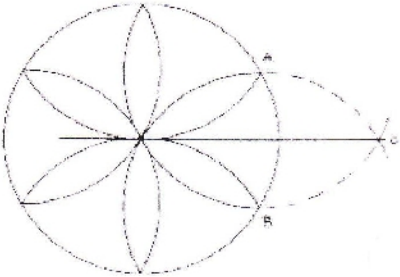
retour sommaire

C'est une magnifique occasion de montrer aux élèves des **cercles tangents** ! De plus, construire le dodécagone régulier offre la possibilité de fabriquer des cadrans d'horloge magnifiquement décorés…

Super–pétale et médiatrice d'un segment / bissectrice d'un angle

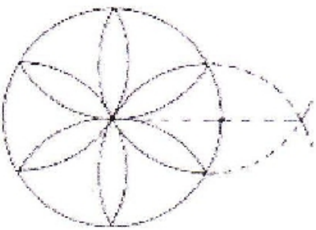
Partons d'une rosace simple et traçons un super–pétale. Pour cela :

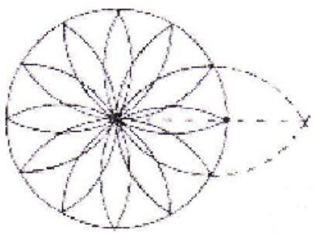
- nous pointons le compas sur l'extrémité d'un pétale en A et nous traçons l'arc de cercle pointillé ;
- nous recommençons la même opération à l'extrémité du pétale B. Les deux arcs de cercle pointillés se coupent en C ;
- joignons C au centre du cercle. Le centre du cercle et le point C sont à égale distance de A et de B. La droite qui les joint est axe de symétrie de la figure.



Nous venons de tracer la **médiatrice du segment** joignant l'extrémité des deux pétales en même temps que la **bissectrice de l'angle** formé par les axes des pétales A et B.
Bien sûr, ces tracés de base de la géométrie ne sont nullement étudiés pour eux-mêmes au cycle 3. Ils s'introduisent ici naturellement dans un tracé apparemment plus complexe mais que les élèves maîtrisent plutôt bien.

Nous savons maintenant trouver le point du cercle situé à mi-chemin de l'extrémité de deux pétales de la rosace simple !
Partons de ce point pour tracer une nouvelle rosace simple dans le cercle de départ.

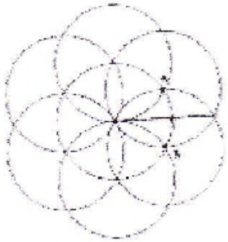
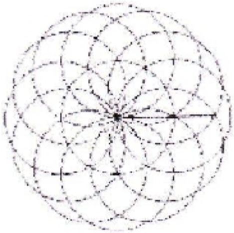
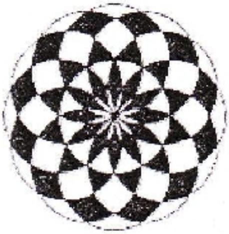




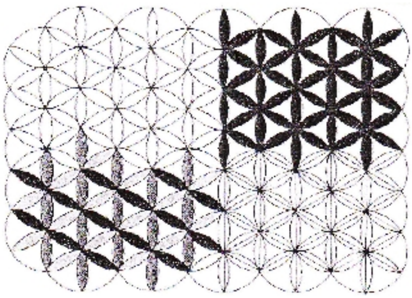
retour sommaire

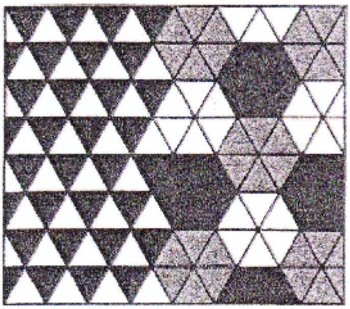
Nous obtenons ainsi la **rosace « simple-double »** dont les douze pétales, rappelés au centre, sont les sommets d'un dodécagone régulier.
Oh mais voici un deuxième procédé de fabrication d'un cadran d'horloge !

Poursuivons encore… Traçons une super-rosace.
Dans la partie centrale, déterminons de la même façon que précédemment, le milieu de l'arc de cercle joignant l'extrémité de deux pétales simples voisins.
Partons de ce point pour tracer une deuxième super-rosace.
Nous obtenons maintenant une **rosace super-double** !!

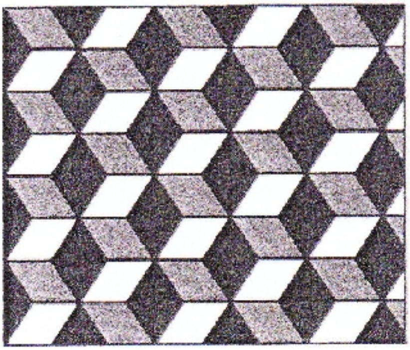
Enfin, utilisons les extrémités des super-pétales comme centres de nouveaux cercles. Les rosaces s'emboîtent divinement les unes dans les autres et remplissent tout le plan. Quel joli pavage de rosaces obtenons-nous !





Le pavage de rosaces se transforme ensuite en pavage de triangles équilatéraux ou d'hexagones. Il suffit de tracer les axes des pétales et d'effacer le reste.

retour sommaire

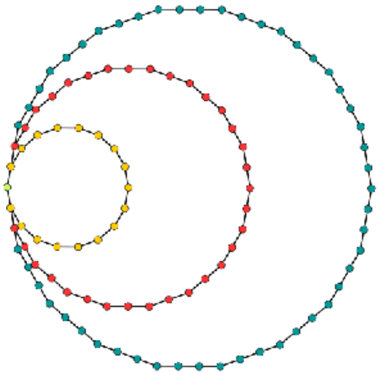


L'association des triangles en losanges, eux-mêmes groupés par trois afin de donner l'impression d'un cube, produit un autre joli pavage !

Nous venons d'explorer la famille des rosaces. Si cela vous donne des idées pour des activités dans vos classes (je l'espère !), n'hésitez pas à écrire quelques lignes en retour dans le Petit Vert ! Nous serons tous « super-pétalants » de cette « rosaçattitude » !

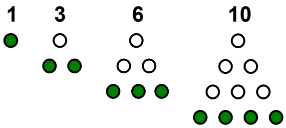
TOUT SAVOIR 100

100 est un nombre 18-gonal ou *octakaidecagonal* (les premiers nombres *octakaidecagonaux* sont 18, 51, 100, 165…)

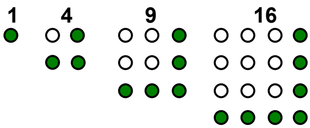


(100, nombre 18-gonal : figure créée par Fathi)

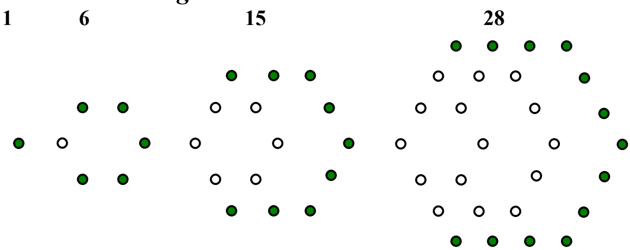
Nombres triangulaires :



Nombres carrés :



Nombres hexagonaux :



retour sommaire

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

Isabelle Dubois

Cent diviseurs

Quel est le plus petit nombre entier possédant exactement cent diviseurs ?
La réponse n'est pas immédiate. Pour trouver ce nombre, nous devons utiliser un résultat fondamental d'arithmétique : la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier.

Première étape : Trouvons le nombre de diviseurs d'un nombre entier, à l'aide de sa décomposition en facteurs premiers.
Si n est un entier s'écrivant $p_1^{\alpha_1} \times ... \times p_2^{\alpha_2}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i des nombres entiers non nuls, alors tous les diviseurs de n sont de la forme $p_1^{\beta_1} \times ... \times p_2^{\beta_2}$, avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$. Ce fait parait évident, mais peut bien entendu se justifier en toute rigueur.
Ainsi, puisque j'ai α_1+1 choix pour l'exposant de β_1, ..., α_r+1 choix pour l'exposant de β_r, on en déduit que n possède exactement $(\alpha_1 + 1) \times ... \times (\alpha_r + 1)$ diviseurs.

Deuxième étape : Cherchons la forme de tous les nombres entiers possédant exactement cent diviseurs.
D'après l'étape précédente, nous devons trouver r entiers α_i tels que $(\alpha_1 + 1) \times ... \times (\alpha_r + 1) = 100$. Il est aisé de lister toutes les décompositions multiplicatives de 100, par nombre croissant de facteurs :

$$100 = 2 \times 50 = 4 \times 25 = 10 \times 10 = 5 \times 20 = 2 \times 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 10$$
$$= 5 \times 5 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

Ainsi, les nombres entiers possédant exactement cent diviseurs sont de neuf formes différentes (les entiers apparaissant ci-dessous étant des nombres premiers) :
a) p_1^{99} b) $p_1 \times p_2^{49}$ c) $p_1^3 \times p_2^{24}$ d) $p_1^9 \times p_2^9$ e) $p_1^4 \times p_2^{19}$
f) $p_1 \times p_2 \times p_3^{24}$ g) $p_1 \times p_2^4 \times p_3^9$ h) $p_1^4 \times p_2^4 \times p_3^3$ i) $p_1 \times p_2 \times p_3^4 \times p_4^4$.

Troisième étape : Déterminons le plus petit nombre entier pour chacune de ces neuf formes.
Il suffit à chaque fois de choisir les plus petits nombres premiers... Nous obtenons :

retour sommaire

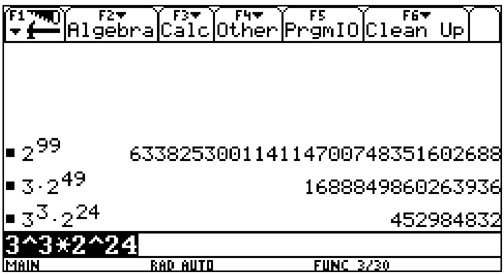
a) 2^{99}, un nombre de 30 chiffres ;
b) 3×2^{49}, un nombre de 16 chiffres ;
c) $3^3\times2^{24}$, un nombre de 9 chiffres ;
d) $2^9\times3^9$ = 10 077 696, un nombre de 8 chiffres ;
e) $3^4\times2^{19}$ = 42 467 328, un nombre de 8 chiffres ;
f) $3\times5\times2^{24}$ = 251 658 240, un nombre de 9 chiffres ;
g) $5\times3^4\times2^9$ = 207 360, un nombre de 6 chiffres ;
h) $2^4\times3^4\times5^3$ = 162 000, un nombre de 6 chiffres ;
i) $5\times7\times2^4\times3^4$ = 45 360.

Conclusion : Le grand gagnant est le nombre **45 360** qui est donc le plus petit nombre entier possédant exactement cent diviseurs. Je laisse au lecteur le soin d'en établir la liste !

Variantes : Nous pouvons aussi déterminer :

- le plus petit entier impair possédant exactement cent diviseurs ; c'est $11\times7\times5^4\times3^4$ = 3 898 125.
- le plus petit entier possédant exactement cent diviseurs, dont le nombre 100 ; c'est : $2^4\times3^4\times5^3$ = 162 000.
- le plus petit cube possédant exactement cent diviseurs ; c'est : $2^9\times3^9$ = 10 077 696.
- le plus petit cube possédant exactement cent diviseurs, dont le nombre 100
- ; c'est : $2^9\times5^9 = 10^9$ ou encore $\left(\sqrt{100}\times 100\right)^3$.

Pour finir, une question ouverte : quel est le plus petit nombre entier possédant exactement cent diviseurs et s'écrivant avec cent chiffres ?



Ajout de la rédaction : les nombres a), b) et c) de la troisième partie à la calculatrice.

retour sommaire

VU SUR LA TOILE

Question d'actualités

Mardi dernier (un peu plus longtemps quand vous lirez cette page), un collègue demandait, aux JN de Rouen, des sources pour une information continue en mathématiques. J'étais sauvé. J'aurais eu du mal à proposer **100** sites sur la toile pour ce numéro spécial. Peut-être l'actualité mathématique ne va-t-elle pas à **100** à l'heure, il n'empêche qu'il se passe tous les jours quelque chose. Ainsi, après une rubrique consacrée aux événements du passé, plongeons-nous dans le présent et, oserai-je même, dans le futur.

Commençons par un site qui porte bien son nom : « Actumaths » qui fournit, comme sur un fil de telex, la suite des dernières informations dont la quantité n'en fait que confirmer la vitalité de la discipline. On y trouvera en outre une rubrique « Juniors » des plus pertinentes :
http://www.actumaths.com/index.php .

La revue « Pour la Science » propose également des pages de mathématiques d'une certaine fraîcheur en échanges d'une maigre contribution :
http://www.pourlascience.fr/ewb_pages/m/maths-thematique.php,

Toute actualité mérite sa part de réflexion et d'analyse. On pourra se rendre à une adresse que j'avais déjà donnée : http://images.math.cnrs.fr/ ou sur l'inestimable « Culture Maths » http://www.dma.ens.fr/culturemath/, puits sans fond de la connaissance. Des références que l'on peut retrouver dans les pages « Ressources » de l'APMEP :
http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique87 .

La « Bibliothèque des mathématiques », Bibmaths, nous renseigne également des dernières nouvelles :
http://www.bibmath.net/actu/index.php3?action=liste&page=0 .

La partie mathématiques du site de l'académie de Nancy-Metz vous fournira les informations à retenir :
http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/maths.html .

J'ai trouvé ici des références d'amateurs éclairés qui ne recoupaient les précédentes sources, à suivre de près :
http://www.wikio.fr/science/mathematiques .

Je n'y résiste pas et vous livre « Oh ! 100 logiciels gratuits ! » :
http://www.presence-pc.com/actualite/top-logiciel-gratuit-36953/ .

Gilles Waehren gilles.waehren@wanadoo.fr

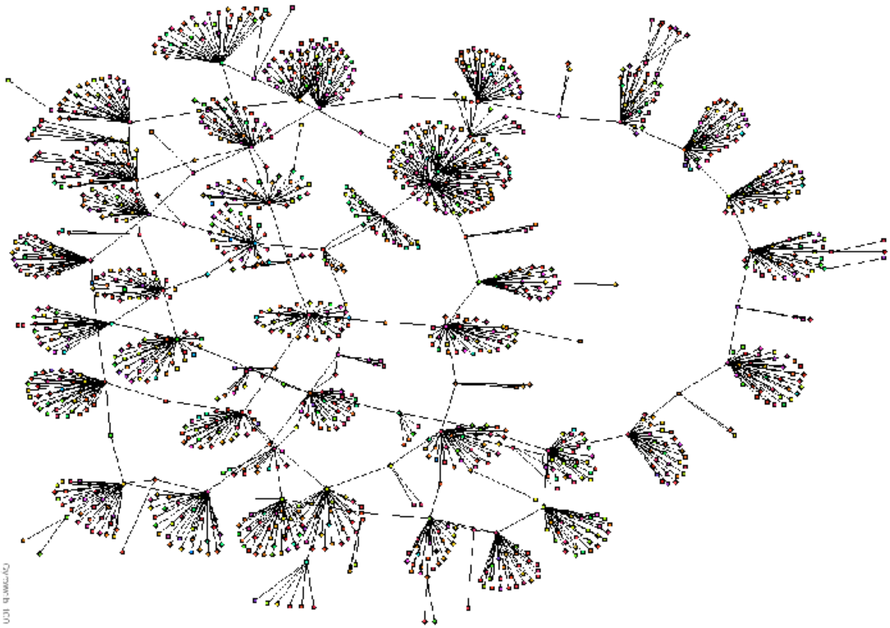
retour sommaire

TOUT SAVOIR

100

Une exploration de 100 nœuds

(Voir les explications sur http://gang.inria.fr/pairapair/gnutella/)



100 est un nombre tout à fait remarquable : il ne figure pas dans le livre de François LE LIONNAIS « Les nombres remarquables » (éditions Hermann), qui comporte pourtant plus de 700 propriétés portant sur 400 nombres… Parmi eux, le Gogol, qui vaut 10^{100} (supérieur au nombre d'atomes de l'univers).

retour sommaire

TOUT SAVOIR
100

De cette visualisation, on en déduit que la somme des 100 premiers entiers impairs consécutifs est 100².

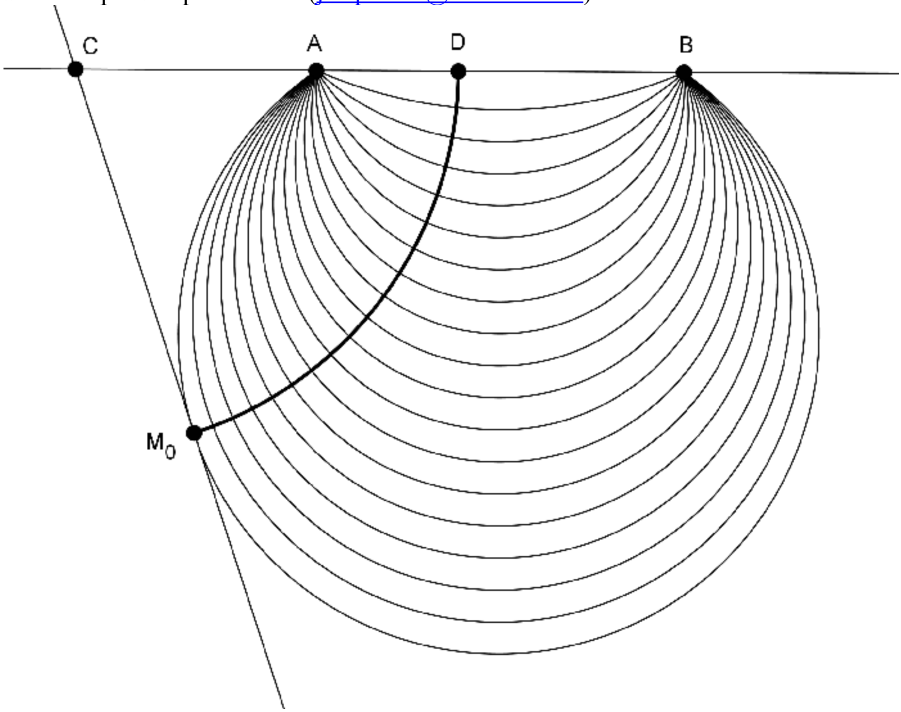
$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n = 2 \times n \times \frac{n+1}{2} + n = (n+1)^2$$

retour sommaire

Solution du problème n°99

<u>Rappel de l'énoncé</u> : Un joueur de football se dirige, balle au pied, vers le but adverse. Quelle est la trajectoire qui lui assure à tout instant le plus grand angle de tir possible ?

Solution par Jacques Choné (jacqchone@hotmail.com)



Soit A et B les extrémités du but visé. A chaque point M du terrain T, associons l'angle $\theta(M)$ sous lequel on voit le segment [A, B]. Soit M_0 la position initiale du joueur. Le problème est de déterminer la courbe partant de M_0 maximisant en tout point M l'accroissement $d\theta = \theta(M + dM) - \theta(M)$.

On sait [voir, par exemple (1) ou (2)] que gradM θ est orthogonal à la ligne de niveau de θ passant par M (ensemble des points N tels que $\theta(N) = \theta(M)$) et est dirigé dans la direction et le sens maximisant l'accroissement $d\theta$. Les courbes cherchées sont donc les courbes orthogonales aux courbes de niveau. Or les lignes de niveau de la fonction $M \rightarrow \theta(M)$ sont les intersections avec le terrain T des

cercles passant par A et B (arcs capables, voir le théorème de l'angle inscrit). Ces cercles appartiennent au faisceau de cercles, F, de points de base A et B. Donc les trajectoires cherchées sont des parties des cercles du faisceau orthogonal à F c'est-à-dire du faisceau à points de Poncelet (ou à points limites) A et B [voir, par exemple (3)].
Conclusion : pour avoir la trajectoire cherchée issue du point M_0, on trace le cercle Γ passant par A, B et M_0 ; soit Γ le cercle centré à l'intersection de la droite (A,B) et de la tangente en M_0 à Γ. Ce cercle Γ est orthogonal à Γ et à tous les cercles du faisceau F. La trajectoire cherchée est l'arc de Γ compris entre M_0 et le segment [A, B].

Remarque : si M_0 est sur la médiatrice du segment[A, B], alors Γ est précisément cette médiatrice et la trajectoire cherchée est le segment joignant M_0 au milieu de [A, B].

Références :

(1) http://fr.wikiversity.org/wiki/Analyse_vectorielle/Gradient

(2) http://www.math.u-psud.fr/~pansu/websm/fonctions.pdf

(3) http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Faisceau_de_cercles&printab

(4) http://www.mathcurve.com/courbes2d/orthogonale/orthogonale.shtml

Problème du trimestre n°100

proposé par Loïc Terrier

Pour le numéro 100 du « Petit Vert », l'APMEP de Lorraine a, comme vous le savez tous, décidé de sortir un album de 100 mathématiciens à collectionner. Les autocollants des mathématiciens sont vendus par pochettes de 5 (tous les autocollants d'une pochette étant différents).

Ecrire un algorithme permettant d'estimer le nombre moyen de pochettes nécessaires pour compléter l'album.

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à : Loïc Terrier, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 Ars sur Moselle (ou loic.terrier**AT**free.fr).

« MATHEMATIKUM »

Exposition « Les mathématiques à la portée de tous ! »
du 22 janvier 2010 au 28 mars 2010
à la Médiathèque de Nancy, 10 rue Baron Louis

Cette exposition, conçue par le musée de Giessen en Allemagne, est présentée par le rectorat en collaboration avec le Goethe Institut de Nancy.

Elle met en scène de manière ludique, quelques concepts mathématiques : la perspective, les pavages, la translation, les probabilités… et également l'optique, la mécanique du solide… Chacun peut expérimenter et découvrir.

Elle est ouverte aux élèves des collèges et lycées de l'académie, du mardi au samedi (plages possibles : 10h-12h, 13h30-15h30, 15h30-17h30) et pour tout public en soirée et en fin de semaine. L'accès est gratuit. Les inscriptions des classes se font auprès de la Médiathèque de Nancy à l'adresse mediatheque@mairie-nancy.fr .

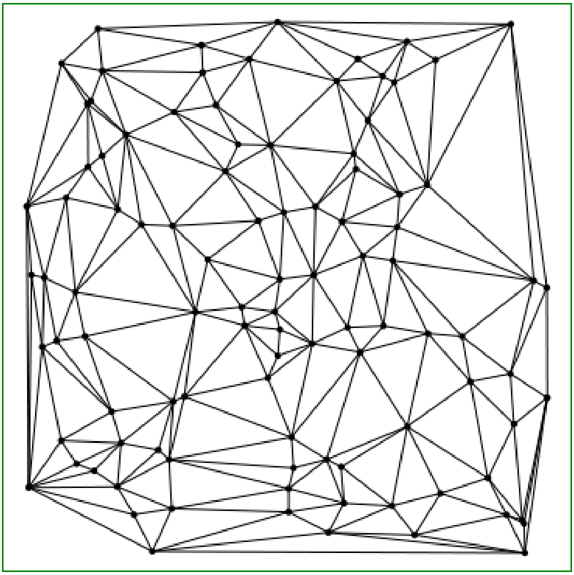
Dans le cadre de l'exposition, un concours « ***Mathémartistes*** » a été proposé aux élèves germanistes de l'académie. La remise des prix aura lieu le 22 janvier, jour d'inauguration de l'exposition.

retour sommaire

TOUT SAVOIR

100

En géométrie algorithmique, la triangulation de Delaunay d'un ensemble P de points du plan est une triangulation DT(P) telle qu'aucun point de P n'est à l'intérieur du cercle circonscrit d'un des triangles de DT(P). Les triangulations de Delaunay maximisent le plus petit angle de l'ensemble des angles des triangles, évitant ainsi les triangles "allongés". Cette triangulation a été inventée par le mathématicien russe Boris Delaunay (1890-1980) en 1934. Ci-contre, une triangulation à 100 points.



La rédaction du Petit Vert et le Comité de la Régionale vous souhaitent à tous une excellente fin d'année, de joyeuses fêtes et une heureuse année 2010.

retour sommaire