N° 163 Septembre 2025

LE PETIT VERT

Bonne rentrée

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP
www.apmeplorraine.fr

SOMMAIRE

ÉDITO

MUTATIONS DU CALCUL AUTOMATISÉ

Gilles WAEHREN

Gilles Dowek est mort le 21 juillet dernier. Après avoir lu ses « Métamorphoses du calcul », j'avais eu le plaisir de l'écouter lors d'un séminaire APMEP en 2009, puis lors de la conférence de clôture des Journées Nationales de Bordeaux en 2018. L'hommage de l'APMEP est consultable sur le site national ; il montre combien Gilles Dowek était attaché à l'enseignement des mathématiques et de l'informatique, à l'enseignement tout court. Il a fait partie, au sein de la Société Informatique de France, des principaux architectes de la création de l'enseignement de spécialité Numérique et Sciences Informatiques, qui motive encore de nombreux professeurs de mathématiques. Gilles Dowek nous a menés sur le chemin qui part du calcul et va vers son automatisation, mettant en évidence le lien complexe qui lie les deux disciplines et qui continue de tirailler les enseignants de mathématiques. Quel calcul enseigner après le développement des calculatrices électroniques dans les années 1980, des logiciels de calculs et de géométrie dynamique dans les années 2000 puis des modèles de langages dans les années 2020 ?

La réforme des cycles de l'école et du collège et celle, à venir, de la Seconde et du cycle terminal permettront-elles de répondre à cette question ? Tout dépend de l'interprétation des textes qui en sera faite. L'interprétation techniciste qui prévaut parfois, peut mener à fragiliser l'équilibre entre le sens du calcul et sa maîtrise performative. La pratique même des automatismes ritualisés nous interroge sur la finalité de l'apprentissage du calcul. L'élève ne peut pas être aussi performant que la calculatrice, mais certaines opérations sont plus rapides à réaliser mentalement qu'en procédant à leur exécution instrumentée : il est plus rapide d'effectuer $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$ de tête que de chercher à saisir ce calcul sur son téléphone. Pour celui qui sait obtenir, sans aide, le résultat de $\frac{1}{7}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$, le calcul précédent sera encore plus simple ; mais pour celui qui n'y parvient pas, quelle solution ? Quand certains de mes élèves scientifiques utilisent leur calculatrice pour connaître la valeur de 2×3, ils m'expliquent que c'est pour vérifier une réponse que je sais qu'ils connaissent. Quel calcul doit-on vérifier et quel droit à l'erreur se donne-t-on ? Quand on suggère à un élève d'établir qu'un nombre est solution d'une équation et que le calcul, instrumenté ou pas, comporte une erreur de saisie, quelle conclusion doit-il donner ?

Les élèves ont compris que la machine est extrêmement fiable pour donner des réponses justes. Mais, à l'instar du travail que chaque enseignant fait pour produire des questions qui permettent de mener à la réponse attendue, l'élève peut aussi être entraîné à s'assurer que sa demande à l'outil numérique correspond bien à son attente.

Retour au sommaire

IL Y A 25 ANS
MAUX DE TÊTE ET GÉOMÉTRIE

À la page 17 du Petit Vert n°63, nous pouvions lire cette phrase :

> « Pascal combattait ses maux de tête par la géométrie. Moi, je combattais la géométrie en faisant semblant d'avoir mal à la tête.» (Tristan Bernard)

Nous sommes allés faire un petit tour dans les programmes 2025 pour le cycle 3. Concernant le CM1 et le CM2, nous pouvons lire :

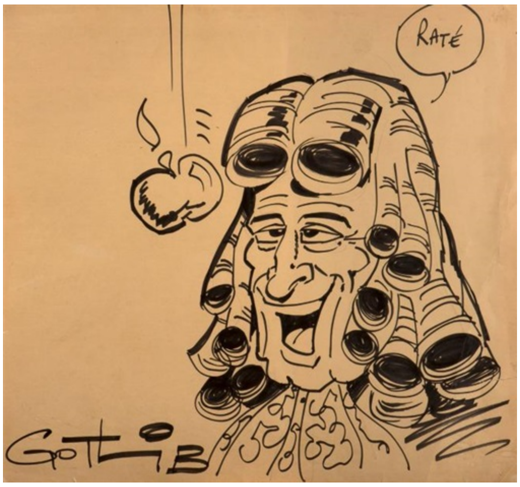
> « Si l'enseignant utilise de manière rigoureuse les notations usuelles avec des parenthèses pour la droite (AB), des crochets pour le segment [AB], une parenthèse et un crochet pour la demi-droite [AB) et aucune parenthèse pour la longueur AB, aucune connaissance de ces conventions n'est exigible pour les élèves : les consignes expliciteront donc systématiquement les symboles utilisés. Par exemple, il ne sera pas demandé aux élèves de ” tracer [AB]”, mais de ”tracer le segment [AB]”. »

En 2025, l'enseignant qui utilise de manière rigoureuse ces notations ne semble pas devoir les justifier et expliquer qu'écrire « la droite AB » n'est pas incorrect, la notation (AB) seule n'étant qu'un raccourci utilisé pour ne pas à avoir à écrire mot « droite » dans certaines expressions mathématiques rencontrées plus tard telles $(AB)\perp(CD)$.

Ces nouveaux programmes permettront-ils d'éviter les maux de tête ?

PHRASE DU TRIMESTRE

« Des millions de gens ont vu tomber une pomme, Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi. »
(Bernard Baruch)



Retour au sommaire

RETOUR SUR LE RALLYE DE L'APMEP LORRAINE

Les élèves des classes lauréates ont été récompensé-e-s par un diplôme personnalisé indiquant la place de leur classe, un exemplaire du puzzle « Losange de Metz » ou « Losangram » (productions APMEP Lorraine), un rapporteur trigonométrique et une règle-équerre ALEPH (notre partenaire).

En collège

Première : la classe de 3ème 1 du collège Les Gaudinettes à Marange-Silvange (57) avec 39,1 points sur 40 (0,1 à la question subsidiaire).

Des jeux aux Gaudinettes

Avant les vacances de printemps, les classes de 3e du collège ont participé au rallye de mathématique organisé par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

Ce rallye est organisé dans toute l'académie, 57 classes de 3e y ont participé. Nos trois classes de 3e se classent 1ère, 4e et 9e.

Afin de récompenser la classe de 3e qui finit première, Odile, Marie Thérèse et Daniel, trois membres de l'association, sont venus au collège pour remettre des lots et un diplôme à tous les élèves de la classe.

À la suite de la remise des prix, ils ont animé des séances de jeux mathématiques avec 5 classes du collège, soit 128 élèves au total.

Ils ont proposé plus de 50 jeux mathématiques mêlant réflexion, construction, assemblage de puzzles…

Les élèves, ainsi que les quatre professeurs de mathématiques, sont repartis ravis.

Jeux avec les 3e

Jeux avec des 6e

Retour au sommaire

Deuxième : la classe de 3ème 7 du collège Louis Aragon à Jarny (54) avec 39 points sur 40.

Dans le Républicain Lorrain du 9 avril 2025

Jarny

Collège Aragon : les élèves de 3e s'illustrent en mathématiques

Cinquante-six classes de l'académie ont participé à ce concours.

Les six classes de 3e du collège Louis-Aragon de Jarny ont participé au Rallye de mathématiques organisé par l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public de l'académie Nancy-Metz. « C'est une compétition exigeante, qui valorise la réflexion collective et l'ingéniosité », indique le principal, Michel Henry.

Les résultats sont tombés, à la grande joie de l'équipe enseignante (et des élèves concernés) : une classe s'est classée 2e (sur cinquante-six classes participantes), deux autres 4e ex aequo, et deux encore 13es.

« Ces performances illustrent la capacité des élèves à mobiliser leurs connaissances, à travailler en équipe et à faire preuve de persévérance face à des défis complexes, se félicite le principal. Organisés en groupes, les élèves ont su conjuguer esprit de coopération et rigueur intellectuelle, mettant en œuvre des compétences variées dans un cadre stimulant ».

Troisième : la classe de 3ème B du collège Hubert Curien à Cornimont (88) avec 37 points sur 40.

Ça s'est très bien passé, Odile a même réussi à faire jouer les élèves !

Retour au sommaire

En lycée

Première : la classe de 2^{nde} 2 du lycée Stanislas à Villers-lès-Nancy (54) avec 39 points sur 40.

Remise des prix au lycée Stanislas aux élèves de 2^{nde} 2 avec leur enseignante de math, en présence du proviseur adjoint, au bar du lycée, jus de fruits servis par les élèves de 1ere STHR.

Deuxième : la classe de 2^{nde} S07 du lycée Louis Vincent à Metz (57) avec 37 points sur 40.

Retour au sommaire

Troisième : la classe de 2nde S10 du lycée Louis Vincent à Metz (57) avec 36 points sur 40.

Félicitations aux lauréates et lauréats et bien sûr à leurs professeurs.
À l'an prochain, si vous le voulez bien !

" **LE PETIT VERT** " est le bulletin de la régionale **APMEP Lorraine**.

Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin « Au fil des maths » et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).

Son but est d'une part d'**informer** les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de **permettre les échanges "mathématiques"** entre les adhérents.
Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à redactionpetivert@apmeplorraine.fr.

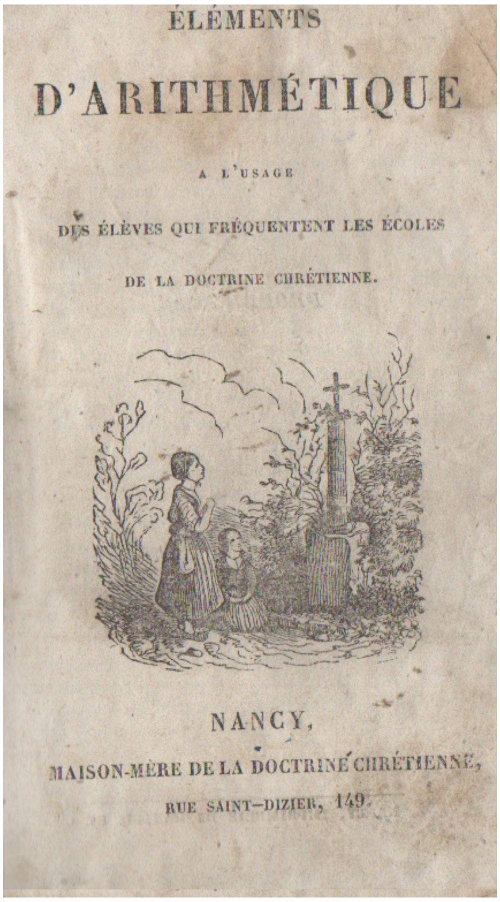
Le **Comité de rédaction** est composé de Geneviève Bouvart, Fathi Drissi, François Drouin, Françoise Jean, Christelle Kunc, Laetitia Ludwigs, Léa Magnier, Michel Ruiba et Gilles Waehren.

La couverture du Petit Vert n° 163 est réalisée par Léa Magnier.

Retour au sommaire

IL Y A PLUS DE 160 ANS DES AUTOMATISMES OU DU SENS

D'après les mots écrits sur l'avant dernière page de couverture, ce livre a été offert à son utilisateur en 1851.



ÉLÉMENTS

D'ARITHMÉTIQUE

A L'USAGE

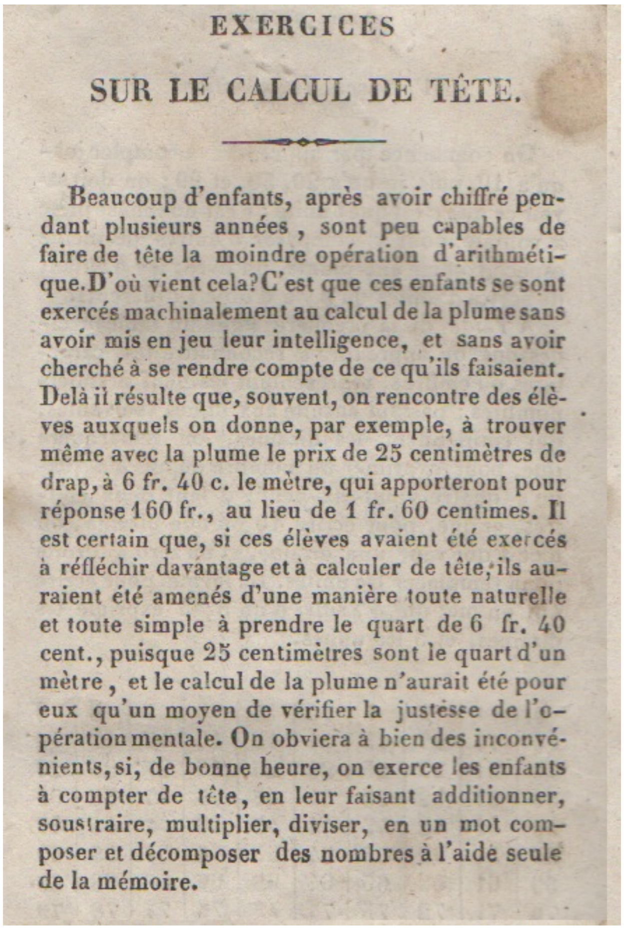
DES ÉLÈVES QUI FRÉQUENTENT LES ÉCOLES

DE LA DOCTRINE CHRÉTIENNE.

NANCY,

MAISON-MÈRE DE LA DOCTRINE CHRÉTIENNE,

RUE SAINT-DIZIER, 149.



EXERCICES

SUR LE CALCUL DE TÊTE.

Beaucoup d'enfants, après avoir chiffré pendant plusieurs années, sont peu capables de faire de tête la moindre opération d'arithmétique. D'où vient cela? C'est que ces enfants se sont exercés machinalement au calcul de la plume sans avoir mis en jeu leur intelligence, et sans avoir cherché à se rendre compte de ce qu'ils faisaient. Delà il résulte que, souvent, on rencontre des élèves auxquels on donne, par exemple, à trouver même avec la plume le prix de 25 centimètres de drap, à 6 fr. 40 c. le mètre, qui apporteront pour réponse 160 fr., au lieu de 1 fr. 60 centimes. Il est certain que, si ces élèves avaient été exercés à réfléchir davantage et à calculer de tête, ils auraient été amenés d'une manière toute naturelle et toute simple à prendre le quart de 6 fr. 40 cent., puisque 25 centimètres sont le quart d'un mètre, et le calcul de la plume n'aurait été pour eux qu'un moyen de vérifier la justesse de l'opération mentale. On obviera à bien des inconvénients, si, de bonne heure, on exerce les enfants à compter de tête, en leur faisant additionner, soustraire, multiplier, diviser, en un mot composer et décomposer des nombres à l'aide seule de la mémoire.

Une lecture qui reste très actuelle en 2025.

Avant l'École de Jules Ferry, on se préoccupait déjà du sens à donner à certains automatismes.

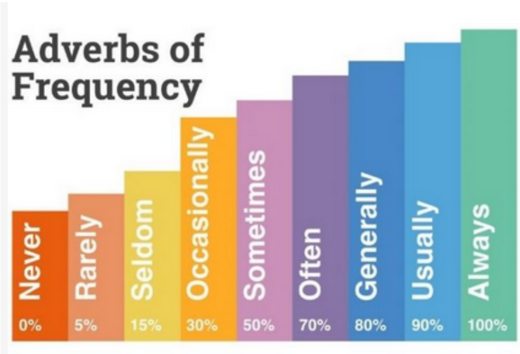
Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

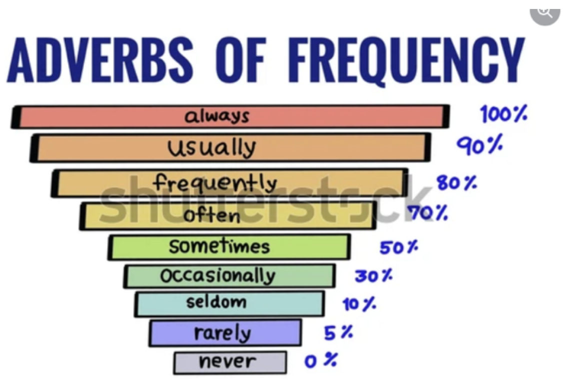
LES ADVERBES DE FRÉQUENCE EN ANGLAIS

Laetitia LUDWIGS
Collège Jacques Gruber, Colombey-les-Belles

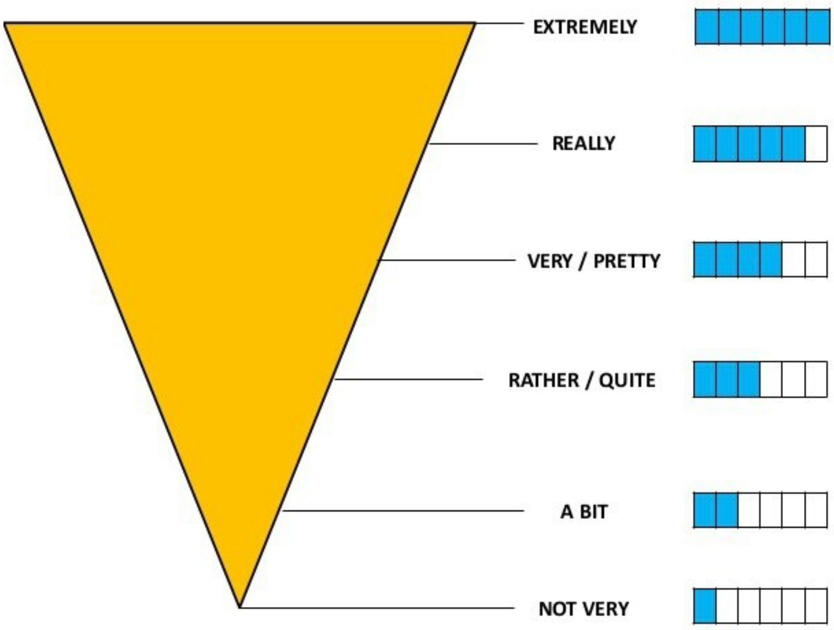
Suite à des échanges entre membres du comité de rédaction, l'envie est venue de compléter l'iconographie évoquée dans ce numéro par d'autres exemples présentant des erreurs ou des imprécisions mathématiques dans leur réalisation.



Premier exemple



Deuxième exemple



Des représentations plus satisfaisantes existent.

L'activité évoquée dans cet article a été mise en œuvre en classe de quatrième.
Voici l'énoncé proposé aux élèves.

Retour au sommaire

Les adverbes de fréquence en Anglais

Partie 1

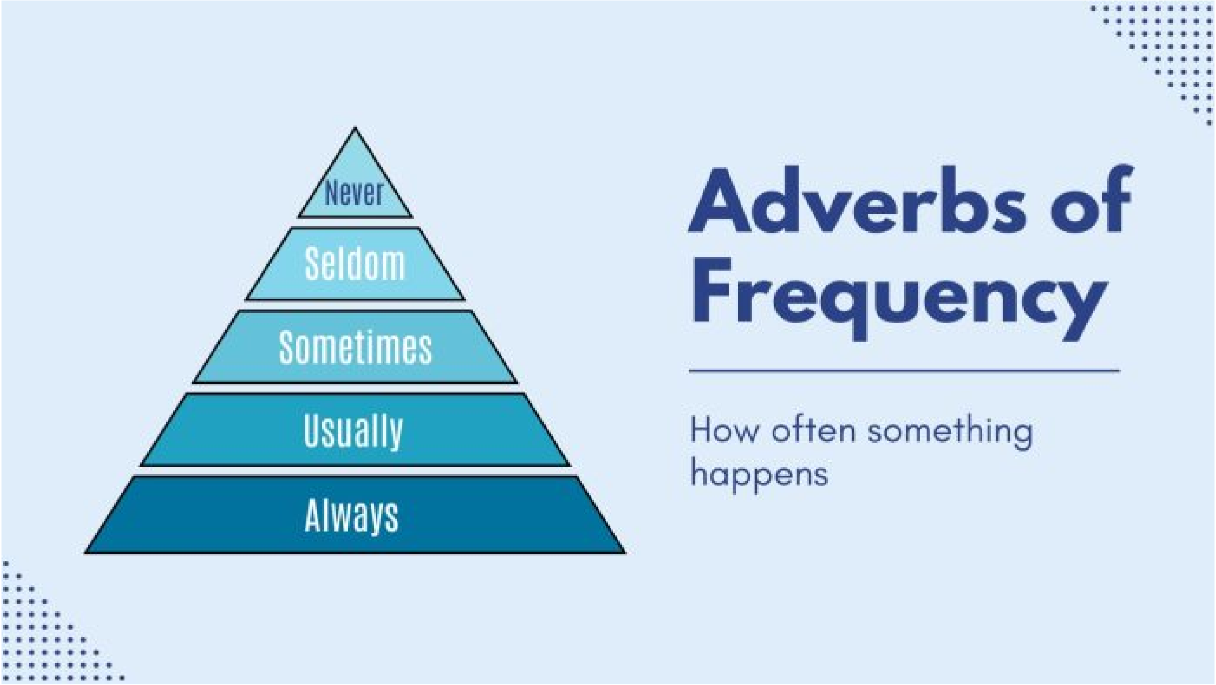


Image extraite du site https://allesl.com/adverbs-of-frequency/

Si « Always » représente 100%, sur cette iconographie, quel pourcentage représente « Never » ?

Partie 2

Voici ce que l'on peut y lire dans le texte écrit sous le diagramme

Examples of Adverbs of Frequency

Adverbs of frequency are like our daily routines, telling us how often we do things. Let's explore some common ones, each with its own unique frequency.

Here are some of the most common adverbs of frequency :

1) *Always (100%) : This is a full-time commitment, happening without fail. If you always drink water first thing in the morning, it means you do it every single day, with no exceptions.*
2) *Usually (80%) : This one's like a reliable friend who's almost always there. If you usually take a walk after dinner, it means you do it most nights, but there might be a few exceptions.*
3) *Often (60%) : Often is when something happens more times than not. If you often read before bed, it means many nights find you with a book in your hand, but not always.*
4) *Sometimes (40%) : This is the halfway mark, where it's hit or miss. If you sometimes skip breakfast, it means around half the time you do, and half the time you don't.*
5) *Rarely (20%) : Here's where things start to be uncommon. If you rarely eat out, it means dining at restaurants doesn't happen often, making it a special occasion.*
6) *Never (0%) : Absolute zero, where an event just doesn't happen. If you never drink coffee, it means you avoid it entirely, every single day.*

Retour au sommaire

Each of these adverbs adds a layer of meaning. It helps us share what we do and how often we do it.

Construire un support visuel mathématiquement juste, où chaque adverbe occupe la place exacte correspondant à sa fréquence.

Voici une traduction.

Exemples d'adverbes de fréquence

Les adverbes de fréquence sont comme nos routines quotidiennes : ils indiquent à quelle fréquence nous faisons quelque chose. Explorons quelques-uns des plus courants, chacun avec sa propre "intensité" de fréquence.

Voici quelques-uns des adverbes de fréquence les plus courants :

1) ***Always (100 %)*** *: c'est un engagement à plein temps, qui se produit sans la moindre exception.*
   Exemple : « Si vous buvez toujours de l'eau dès le réveil, cela signifie que vous le faites chaque jour, sans exception. »
2) ***Usually (80 %)*** *: c'est comme un ami fiable, presque toujours présent.*
   Exemple : « Si vous faites généralement une promenade après le dîner, cela signifie que vous le faites la plupart des soirs, mais avec quelques exceptions possibles. »
3) ***Often (60 %)*** *: cela se produit plus souvent que non.*
   Exemple : « Si vous lisez souvent avant de vous coucher, cela signifie que beaucoup de soirs vous avez un livre en main, mais pas systématiquement. »
4) ***Sometimes (40 %)*** *: on est à mi-parcours : ça passe ou ça casse.*
   Exemple : « Si vous sautez parfois le petit-déjeuner, cela signifie qu'à peu près la moitié du temps vous le prenez, et l'autre moitié non. »
5) ***Rarely (20 %)*** *: ici, les occurrences sont peu fréquentes.*
   Exemple : « Si vous mangez rarement au restaurant, cela signifie que c'est une occasion spéciale, car vous y allez peu souvent. »
6) ***Never (0 %)*** *: zéro absolu, l'événement ne se produit pas.*
   Exemple : « Si vous ne buvez jamais de café, cela signifie que vous l'évitez complètement, chaque jour. »

Chacun de ces adverbes apporte une nuance supplémentaire : ils nous aident à exprimer ce que nous faisons et la fréquence à laquelle nous le faisons.

Retour sur la mise en œuvre en classe

L'activité a été menée sur deux heures avec une classe de 4e.

Dans un premier temps, les élèves ont été surpris, voire déstabilisés, par l'idée de travailler sur l'anglais pendant un cours de mathématiques, ces deux disciplines se croisant rarement dans leur expérience scolaire.

Retour au sommaire

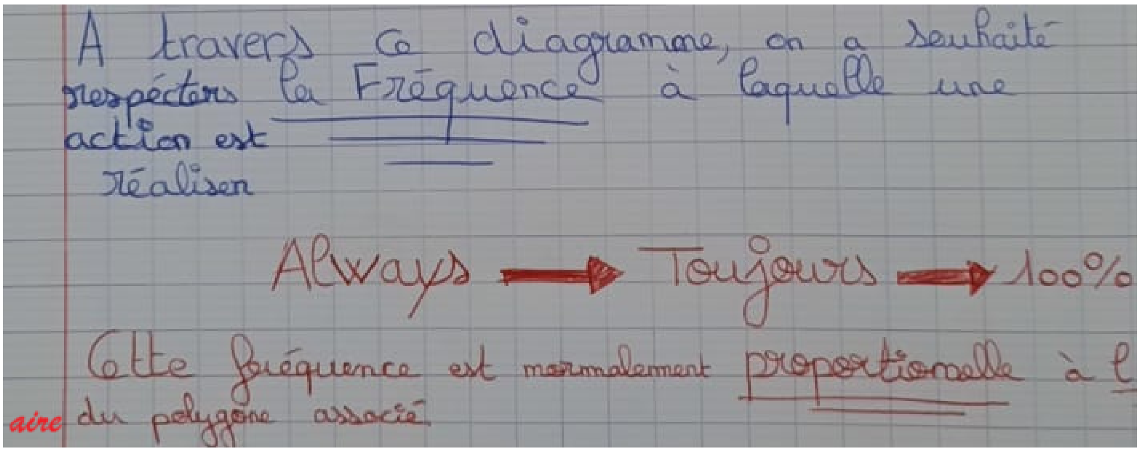
Première heure : travail en groupes

La consigne donnée était de déterminer la valeur en pourcentage de « Never », sachant que « Always » représentait 100 % dans le diagramme proposé.

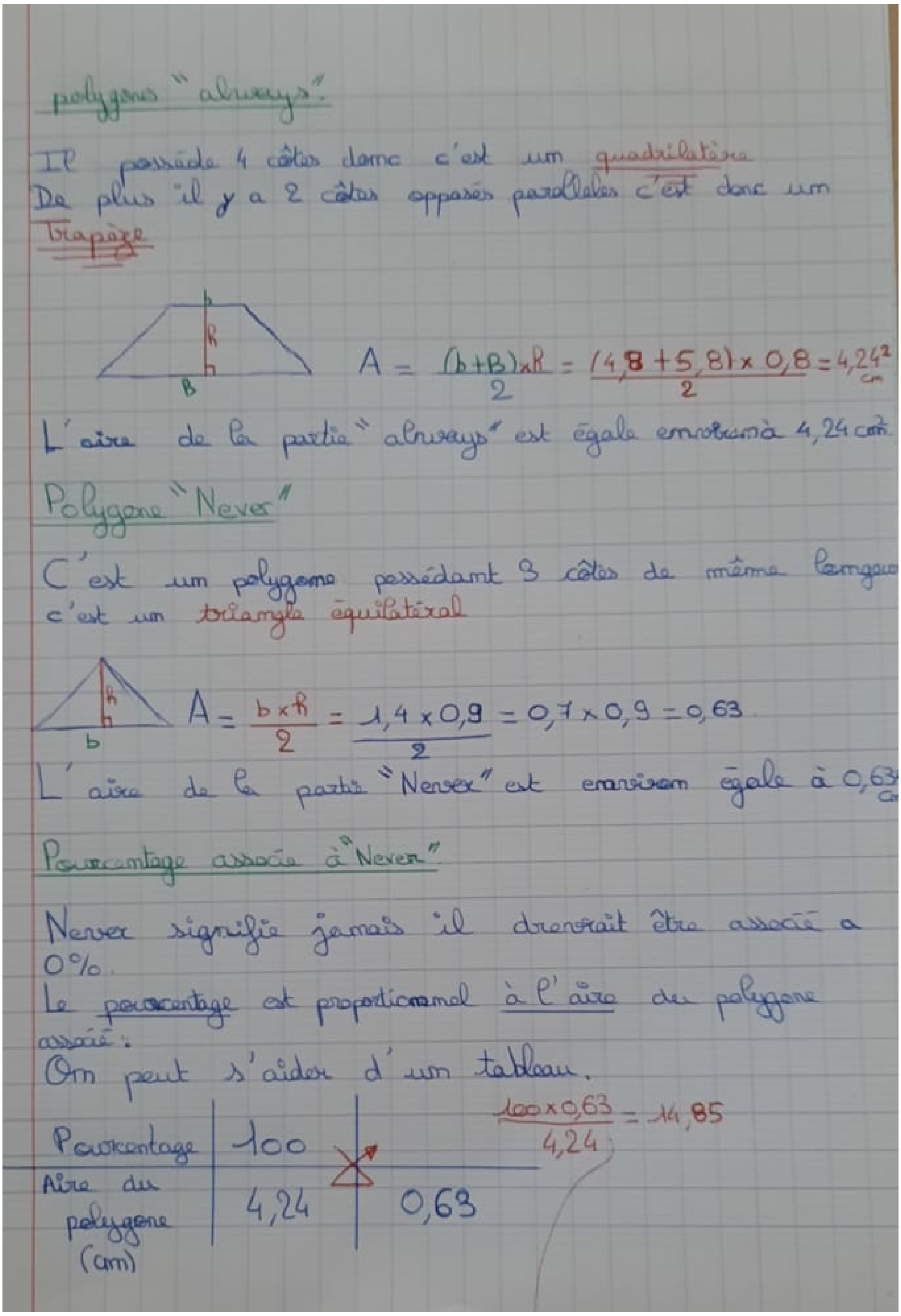
Assez naturellement, beaucoup d'élèves ont affirmé que « Never » correspondait à 0 %, sans chercher plus loin. L'idée que l'aire (et non seulement la position ou la hauteur) soit liée au pourcentage ne leur est pas apparue immédiatement.

Il a donc fallu accompagner les élèves pour qu'ils dépassent cette intuition première et s'appuient davantage sur les **informations visuelles du diagramme**. Ce travail a été l'occasion de revenir sur des notions de **proportionnalité** et de **formules d'aires**, qui sont encore fragiles pour bon nombre d'élèves à ce niveau.

Ce moment a également permis d'aborder une réflexion plus large sur l'interprétation des données graphiques : nous avons insisté sur l'importance d'adopter un **regard critique** face aux diagrammes présentés, notamment dans les médias. Selon l'échelle ou le type de diagramme utilisé, **le ressenti transmis peut varier fortement**. Avec un titre bien choisi, le message peut être orienté : il est donc essentiel de réfléchir par soi-même.



Retour au sommaire



polygones "always"

Il possède 4 côtés donc c'est un quadrilatère
De plus il y a 2 côtés opposés parallèles c'est donc un trapèze

$A = \frac{(b+B)\times h}{2} = \frac{(4,8+5,8)\times 0,8}{2} = 4,24\ cm^2$

L'aire de la partie "always" est égale environ à 4,24 cm²

Polygone "Never"

C'est un polygone possédant 3 côtés de même longueur c'est un triangle équilatéral

$A = \frac{b\times h}{2} = \frac{1,4\times 0,9}{2} = 0,7\times 0,9 = 0,63$

L'aire de la partie "Never" est environ égale à 0,63 cm²

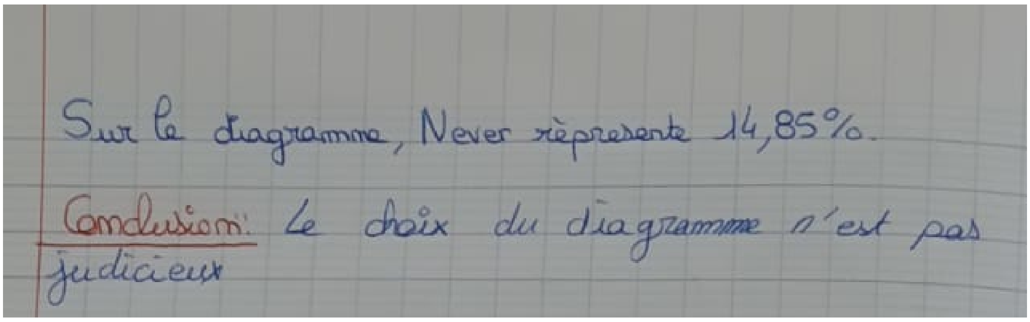
Pourcentage associé à "Never"

Never signifie jamais il devrait être associé à 0%.
Le pourcentage est proportionnel à l'aire du polygone associé :
On peut s'aider d'un tableau.

Pourcentage	100	
Aire du polygone (cm)	4,24	0,63

$\frac{100\times 0,63}{4,24} = 14,85$

Retour au sommaire



Deuxième heure : lecture et modélisation

Lors de la deuxième heure, les élèves ont travaillé sur la **Partie 2** de l'activité. Après lecture collective du texte en anglais, nous avons dégagé les informations essentielles.

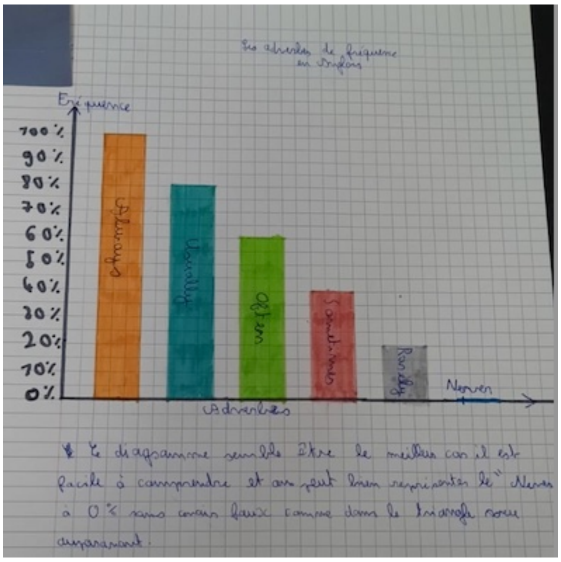
Ils ont relevé que les pourcentages associés aux adverbes dans le texte diffèrent légèrement de ceux perçus dans le diagramme initial, bien qu'ils proviennent du même site.

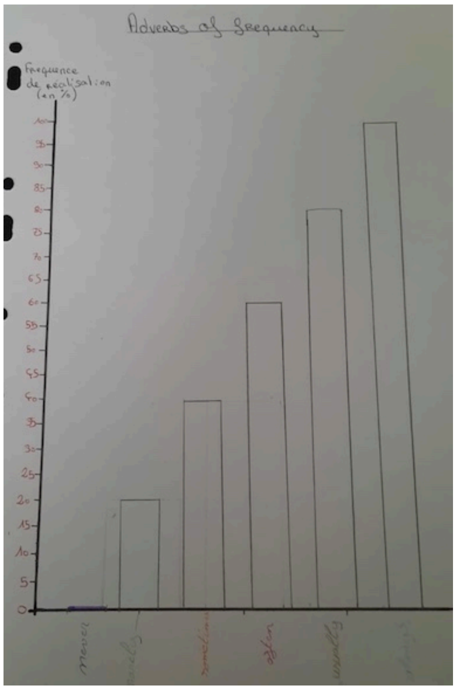
Grâce au travail de la séance précédente, les élèves ont su rapidement construire des **diagrammes mathématiquement justes**, même si certaines difficultés sont apparues :

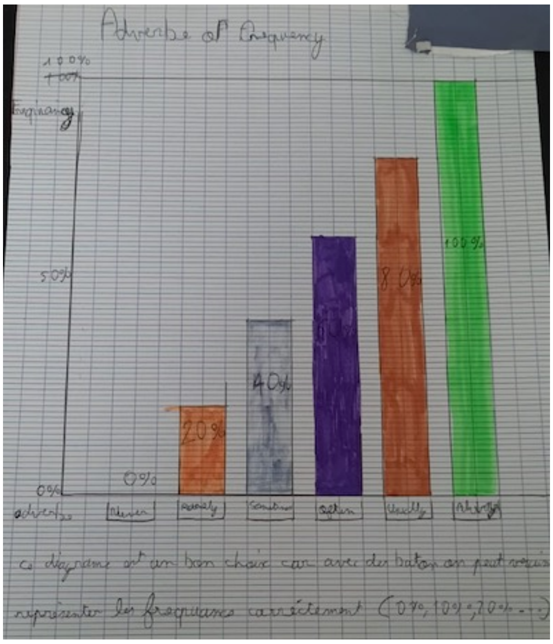
- certains élèves ont été troublés par le fait que représenter « Never » revenait à **tracer un rectangle de hauteur nulle** et dont la largeur est sur l'axe — une abstraction parfois difficile à formuler ; il a fallu les aider à verbaliser leur gêne pour la dépasser ;
- d'autres ont eu du mal à comprendre que **c'est l'aire** d'un rectangle (et non uniquement sa hauteur) qui doit être proportionnelle au pourcentage ; cela a conduit à des échanges riches sur l'importance de **l'uniformité de la largeur des rectangles** dans les diagrammes en barres ;
- pour ceux qui ont choisi des **diagrammes circulaires**, nous avons repris la notion d'**angle proportionnel à une fréquence**, et cela a également permis de travailler avec le **rapporteur** et de consolider les conversions entre pourcentage et degrés dans un cercle (360°).

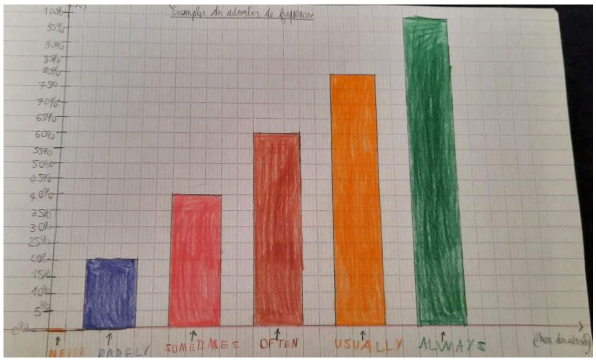
Voici ci-dessous quelques productions d'élèves : certaines d'entre-elles sont originales et témoignent d'une belle réflexion.

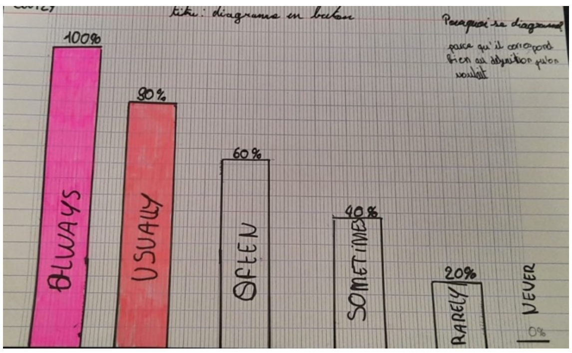
Retour au sommaire









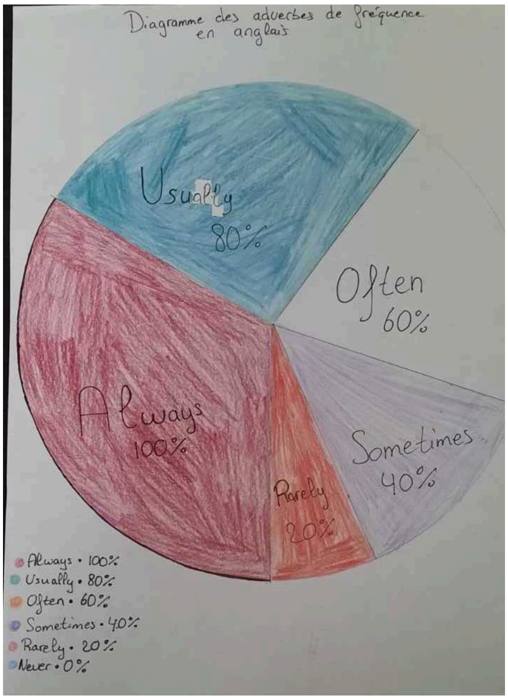


Ces cinq représentations à l’aide d’histogrammes sont assez « classiques ».

Retour au sommaire

Celle-ci est plus originale.

Voici deux représentations utilisant des diagrammes circulaires.



Ne pas imposer a priori de type de représentation fournit de riches supports à analyser en classe avec les élèves.

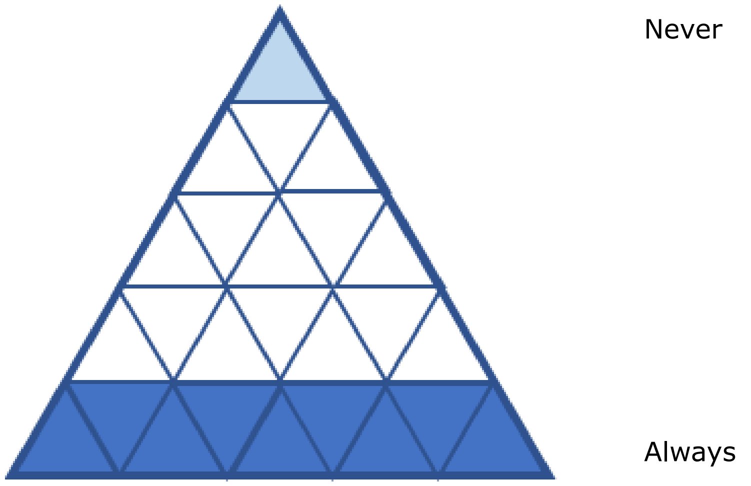
Retour au sommaire

Conclusion pédagogique

Si les productions finales diffèrent en apparence selon les outils choisis, les compétences et connaissances mises en œuvre, **l'objectif principal a bien été atteint** : réfléchir à la **cohérence entre le message que l'on souhaite transmettre et la représentation choisie**.
Cette activité a permis de développer à la fois des compétences en géométrie, en proportionnalité, en lecture de données, mais aussi une **posture critique** essentielle dans l'analyse de documents visuels.

Complément

Dans la partie 1, cette question était posée :
Si « Always » représente 100%, sur cette iconographie, quel pourcentage représente « Never » ?
Voici une réponse possible à cette question.

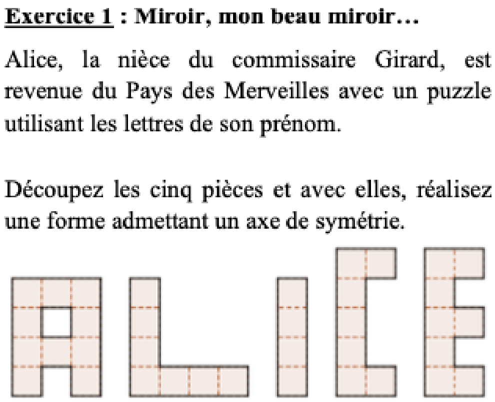


Always est visualisé par 9 triangles équilatéraux unitaires, Chaque triangle équilatéral représente donc 1/9 de 100%. *Never* représente donc un peu plus de 11%.

Retour au sommaire

LE PUZZLE-MOT « ALICE »

François DROUIN
Groupe Jeux - APMEP Lorraine



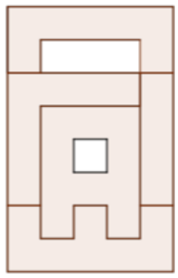
Exercice 1 : Miroir, mon beau miroir…

Alice, la nièce du commissaire Girard, est revenue du Pays des Merveilles avec un puzzle utilisant les lettres de son prénom.

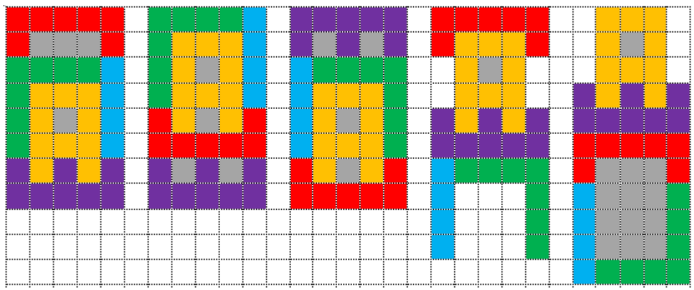
Découpez les cinq pièces et avec elles, réalisez une forme admettant un axe de symétrie.

C'était un des exercices proposés au « Rallye Mathématique de Lorraine 2025 ».

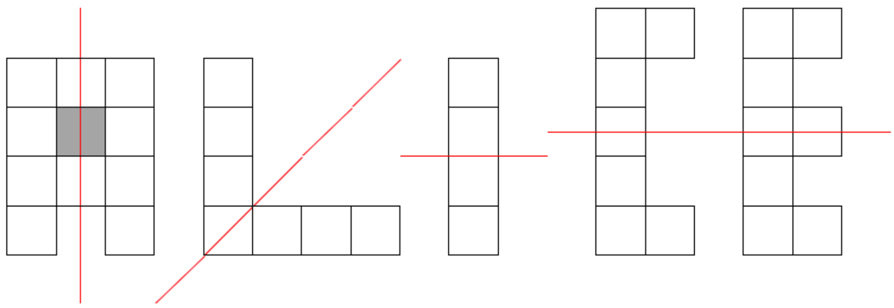
Voici la solution proposée : il était précisé qu'elle n'était pas unique.



Pendant la préparation de l'énoncé, cette non-unicité était bien présente.

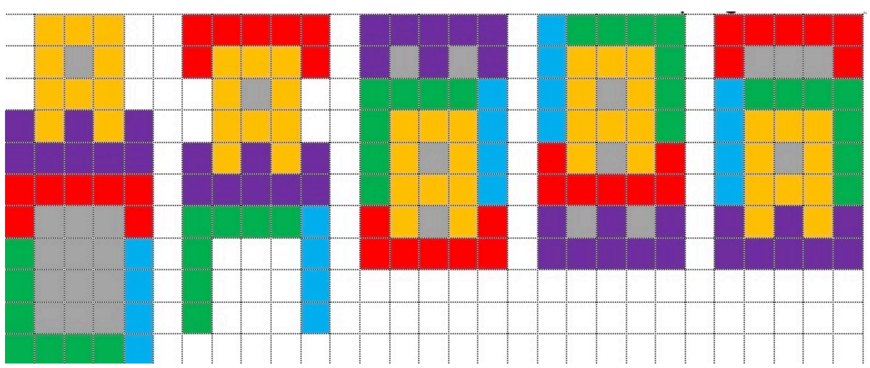


Ce qui avait été réalisé par les élèves en apporterait sans doute d'autres.



Chacune des pièces admet au moins un axe de symétrie (ceci pourra être constaté dès le Cours Moyen). Retournée, la pièce **A** reste un **A**, il en est de même pour les pièces **L**, **I**, **C** et **E**.

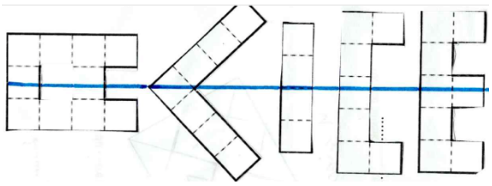
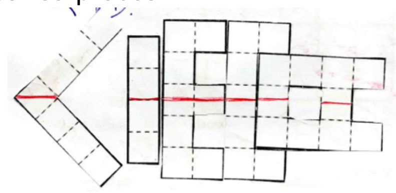
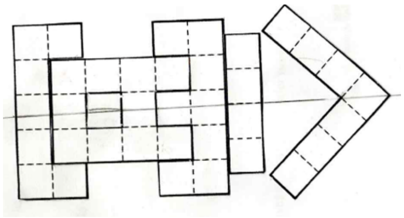
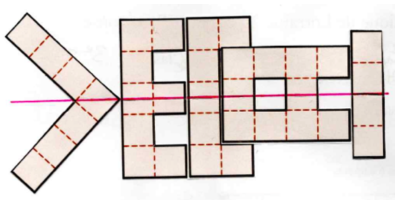
De nouvelles solutions apparaissent.



Retour au sommaire

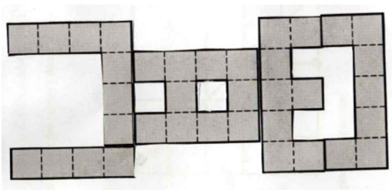
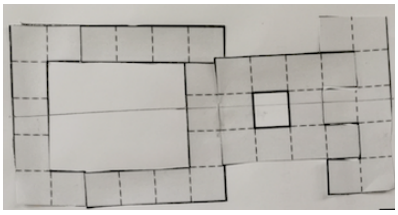
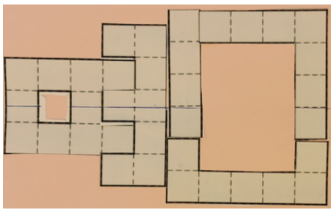
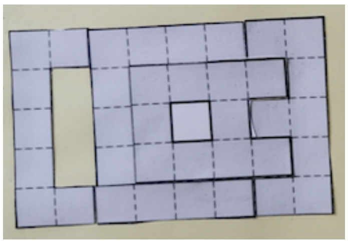
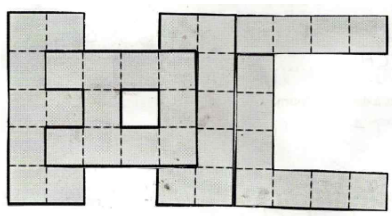
Des assemblages repérés dans des propositions faites par des élèves de Troisième

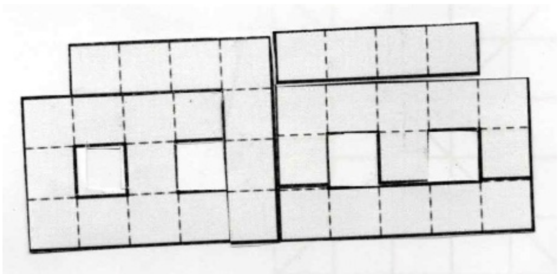
Des élèves ont utilisé un axe de symétrie commun à toutes les pièces.

La première proposition montre-t-elle vraiment une « forme » ?

Des élèves ont assemblé des sous-ensembles « symétriques » de pièces.

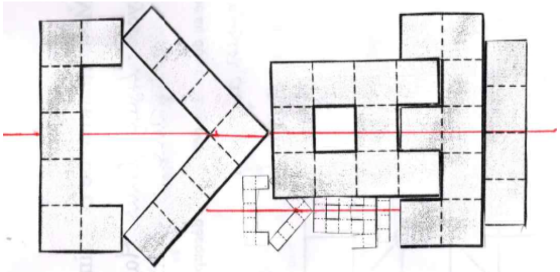








Cette proposition attirait le regard car admettant un axe de symétrie et formée de deux sous-figures superposables.
Hélas, elle ne peut être acceptée, la pièce « C » n’est pas placée complète.

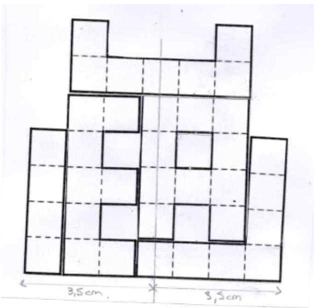
Retour au sommaire

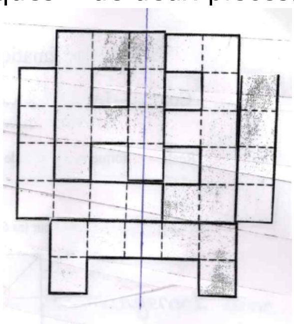
Des assemblages repérés dans des propositions faites par des élèves de Seconde

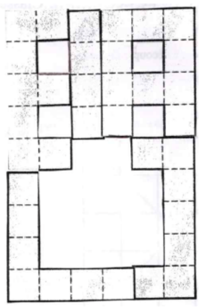


Pour son assemblage, cette classe a également utilisé un axe de symétrie commun à toutes les pièces.

Ces trois classes n'ont utilisé ni les propriétés de symétrie des pièces ni des possibilités d'assemblages de sous-ensembles « symétriques » de deux pièces.

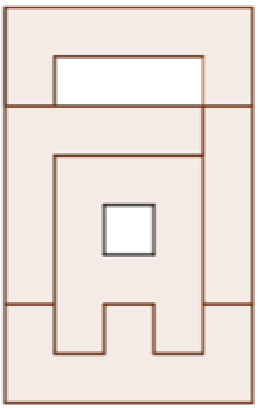






À droite, l'assemblage présente un vaste trou. Pourrait-on obtenir un trou encore plus vaste ? La recherche pourrait se poursuivre dans les classes participantes.

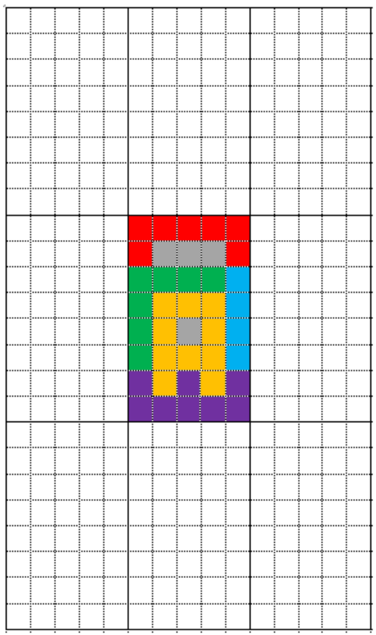
Vers des pavages



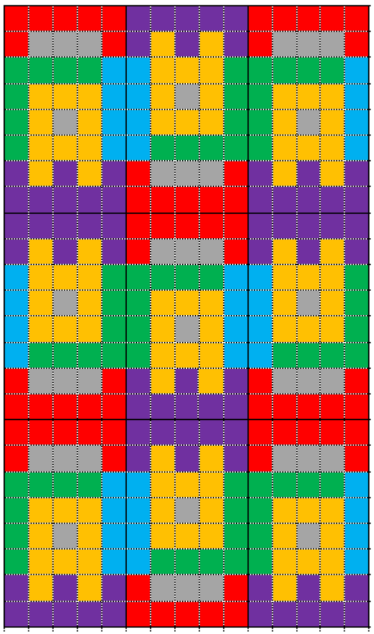
La solution proposée dans le « corrigé » est contenue dans un rectangle.
Tout quadrilatère pave le plan. Des symétries centrales sont mises à contribution.
Concernant les rectangles, des translations peuvent agir.
Les pièces étant retournables, des symétries axiales pourront être utilisées.

Un document a été préparé pour être utilisé par des élèves de collège. D'autres recouvrements du rectangle pourront être mis à contribution.

Retour au sommaire



Pages 1, 2 et 3, la transformation à utiliser est précisée.



Pages 4, 5 et 6, la transformation à utiliser doit être reconnue avant de compléter le dessin.

Retour au sommaire

DOOBLE

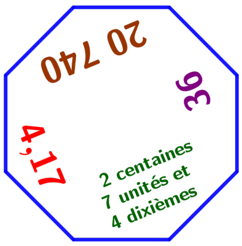
Fathi DRISSI
Collège Louis Armand de Moulins-lès-Metz

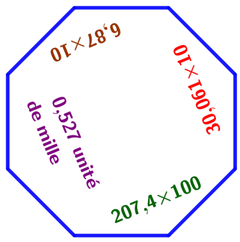
Le Labo du « Moulin des maths » a imaginé des jeux dont le nom est un clin d'œil à un jeu du commerce, utilisé dans des versions dérivées par des professeurs de mathématiques. On en trouve en particulier parmi les dossiers « FabJeux » déposés sur le site de l'APMEP.

« Dooble » et puissances de 10

DOOBLE, c'est 13 multiplications par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 10 ; 100 ou 1000, 13 cartes, 4 écritures par carte et toujours un et un seul nombre commun à deux cartes différentes. À toi de le découvrir !

Exemple : cherche le nombre commun aux deux cartes ci-dessous, mais qui sont désignés par deux écritures différentes.



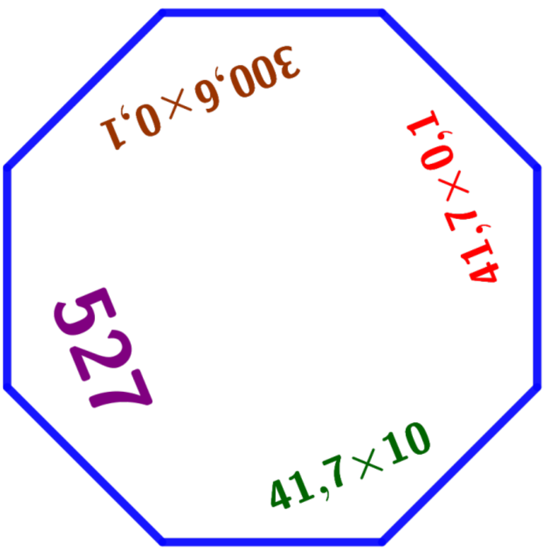


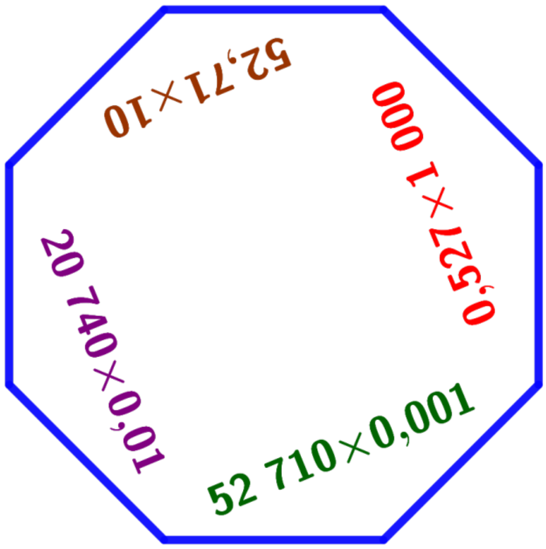
Se référer au règlement du mini-jeu utilisé.

But du jeu

Il faut trouver le nombre commun à deux cartes, le lire à haute voix, prendre la carte, la retourner, ou la poser selon les règles du mini-jeu auquel tu es en train de jouer. Il y aura toujours un seul nombre commun à deux cartes !

Les 13 cartes





Retour au sommaire

$68{,}7 \times 100$
$360 \times 0{,}01$
$3{,}6 \times 10$
5 centaines 2 dizaines et 7 unités

3,6 dizaines
6,87 dizaines
52 710 millièmes
41,7 dizaines

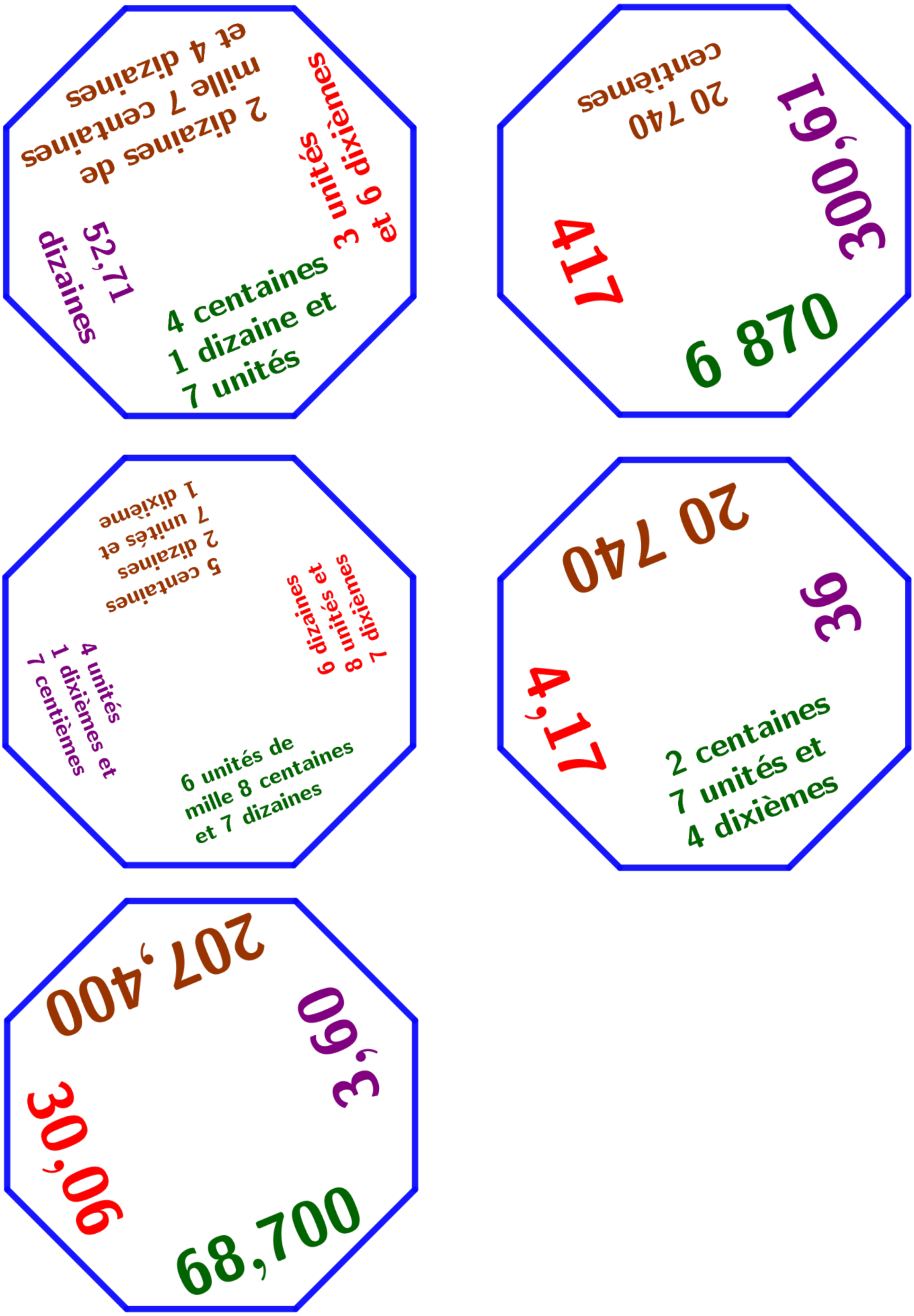
$6{,}87 \times 10$
$30{,}061 \times 10$
$207{,}4 \times 100$
0,527 unité de mille

41,7 dixièmes
360 centièmes
30,061 dizaines
5 dizaines 2 unités 7 dixièmes et 1 centième

68,7 centaines
300,6 dixièmes
52,710
207,4 centaines

6 centièmes et 3 dizaines
3 centaines 6 dixièmes et 1 centième
3 dizaines et 6 unités
527,1

Retour au sommaire



La méthode utilisée pour réaliser ces pièces est téléchargeable.

Plusieurs variantes ont été imaginées. En voici une première pour deux joueurs, d'autres sont téléchargeables.

Retour au sommaire

Cache-cache

1) Nombre de joueurs

Deux joueurs.

2) Installation

Mélangez les cartes, posez-en six face visible devant chaque élève. Posez une carte face visible au centre de la table. Cette carte ne change pas.

3) But du jeu

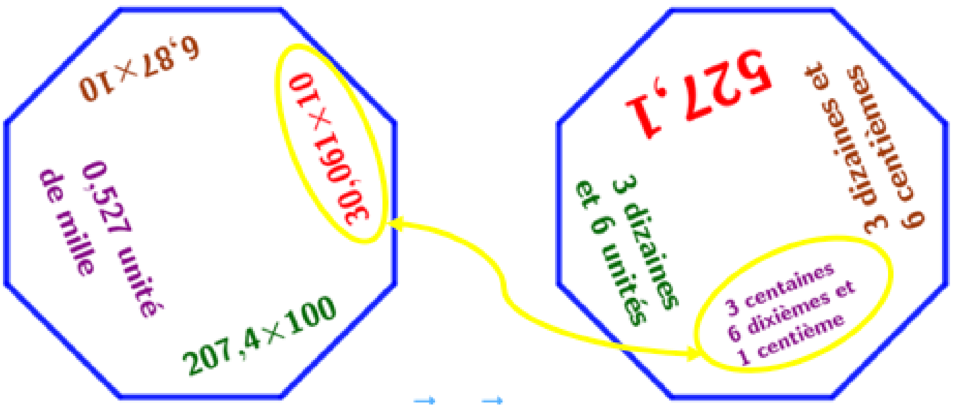
Être le premier joueur à n'avoir plus que des cartes face cachée devant lui.

4) Comment jouer ?

Tout le monde joue en même temps.

Au top départ, chaque joueur doit repérer deux écritures différentes d'un même nombre, commun à l'une de ses cartes et celle placée au centre de la table. Quand il les trouve, il doit les lire à haute voix et retourner sa carte concernée face cachée lorsque celle-ci aura été validée par les autres joueurs.

Exemple



La partie continue ainsi de suite.

5) Le gagnant

Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus de carte face visible devant lui. Il est le gagnant de la partie.

Un jeu « Dooble et écritures décimales » a également été imaginé. Sa méthode de construction est précisée.

De quoi donner envie d'en réaliser d'autres à propos de « grandeurs et mesures » par exemple ?

Retour au sommaire

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

SOURIEZ, VOUS ÊTES OBSERVÉS !

André STEF

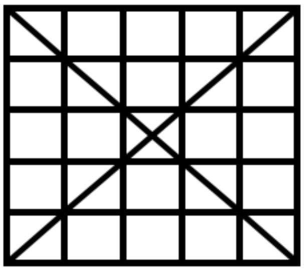
OU : Encore une fois un ou des profs, incluant l'auteur de l'article, se sont « plantés » en donnant un exo dont ils n'ont pas étudié suffisamment la réponse.

NB : Au moment où je reprends cet exercice, le thème de la caméra-surveillance revient dans l'actualité (juillet 2025), contextualiser des problèmes de maths n'est pas sans risques.

Un exercice du Rallye 2025

Exercice 2 : Souriez, vous êtes observés

En stage à San Michael, le commissaire Girard doit gérer l'installation de caméras de surveillance dans un quartier fréquenté par des trafiquants. Chaque caméra va surveiller en permanence l'ensemble des rues qu'elle peut voir (horizontales, verticales ou en obliques). Le commissaire n'a que six caméras. Où devra-t-il les placer ? De combien de façons différentes peut-il les placer ? On donnera un placement possible, en indiquant par un cercle sur la grille réponse, la position des six caméras



Les participants (équipe d'élèves de Troisième ou de Seconde) ont généralement fourni un placement possible. Mais la question du nombre de façons différentes a été très peu abordée et les quelques réponses sont en fait très éloignées des valeurs numériques qui apparaitront dans cet article. Mais on pourra constater que ce n'est pas étonnant.

Première réponse sur le nombre de façons de placer les caméras.

La réponse à cet exercice est de fait bien plus difficile que pensée initialement par les organisateurs du rallye et elle a engendré plusieurs échanges entre les membres du comité régional.

Une première réponse fournie, en interne du comité, correspond au modèle suivant :

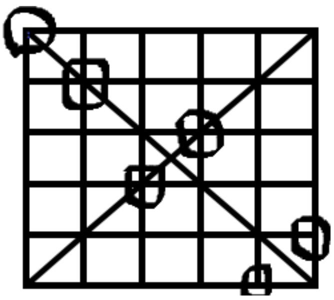
Retour au sommaire

1) On choisit la rue « horizontale » (ou ligne) où la caméra sera sur la diagonale descendante, ainsi l'emplacement de la caméra à l'intersection de 3 rues, la diagonale « descendante », une rue « horizontale » et celle « verticale » (colonne). Il y a 6 possibilités de choix.
2) On choisit alors la rue « horizontale » (ou ligne) où la caméra sera sur la diagonale « ascendante », ainsi l'emplacement de la caméra à l'intersection de 3 rues, la diagonale « ascendante », une rue « horizontale » (autre que celle déjà choisie) et la « verticale » (qui devra être différente de celle déjà suivie par la première caméra). Il y a 4 possibilités de choix, car ne peut pas être choisie la première ligne (1), ni celle où le point d'intersection avec la diagonale « descendante » serait sur la même rue « verticale » que celle de la première caméra.
3) Il nous reste alors à placer les 4 caméras sur les 4 rues horizontales, en imposant les intersections sur les 4 rues verticales restantes. On place par exemple les caméras dans l'ordre (descendant) des rues horizontales restantes. Ce qui fournit 4 ! = 24 possibilités (l'expression « par exemple » sert à se donner une manière de générer les possibilités, sans redondances).

   Conclusion : le nombre de possibilités est donc $6 \times 4 \times 24 = 576$ possibilités. Réponse acceptée et validée par le groupe Rallye, dans un premier temps. Valeur retenue pour la correction du rallye

Validation ou non après coup ?

Comme dans beaucoup de problèmes de dénombrement, la question *a posteriori* « ai-je bien géré le fait qu'il y a, ou pas, un ordre ? » fait s'écrouler régulièrement des raisonnements qu'on jugeait infaillibles. C'est le cas ici, car des placements des 6 caméras peuvent être dénombrés plusieurs fois dans le dénombrement précédent. En effet, ce sera le cas des placements avec plus (sens strict) de 2 caméras sur les diagonales. C'est par exemple le cas ci-dessous :



Ces placements peuvent être obtenus à partir de 4 constructions précisées précédemment :

- **1)** ligne 1, **2)** ligne 3, **3)** les 4 autres lignes (2 puis 4 puis 5 puis 6)
- **1)** ligne 2, **2)** ligne 3, **3)** les 4 autres lignes (1 puis 4 puis 5 puis 6)
- **1)** ligne 1, **2)** ligne 4, **3)** les 4 autres lignes (2 puis 3 puis 5 puis 6)
- **1)** ligne 2, **2)** ligne 4, **3)** les 4 autres lignes (1 puis 3 puis 5 puis 6)

Nous pouvons donc désormais seulement affirmer que le nombre de façons différentes de placer les 6 caméras **est inférieur** (et même au sens strict) **à 576**.

Retour au sommaire

Retour à la source

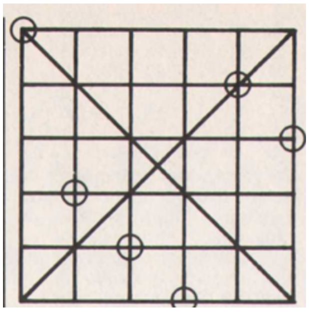
Cet exercice est extrait de la défunte revue **Jeux et Stratégie** (publication de 1980 à 1990), mine de jeux et d'articles, dont quelques collègues sont certainement nostalgiques (y compris l'auteur de cet article).

THE LOOP

Le centre de la ville, the Loop, tire son nom du chemin de fer qui l'entoure. C'est le quartier des affaires et des magasins, dont voici le plan schématique.
Six policiers sont chargés de surveiller en permanence toutes les rues (horizontales), avenues (verticales) et routes (diagonales). Chacun d'eux surveille la totalité de la longueur du chemin qu'il peut voir. Où faut-il placer les six policiers? De combien de façons différentes peut-on les placer?

L'énoncé a été légèrement modifié pour le rallye, mais la question semble bien la même.
Une solution est fournie (à la fin de la revue) :

The Loop :
Voici une manière de placer les six policiers, de façon à surveiller toutes les rues, avenues, routes du quartier (schéma suivant).
• sur Madison Road, un policier peut être placé à 6 carrefours différents;



• sur St-Louis Road, un policier à 4 carrefours différents;
• sur les 2 rues n'ayant que deux carrefours encore libres, deux policiers (2 façons différentes et non 4, car il s'agit de carrefours sur les mêmes avenues);
• sur les deux dernières rues qui n'ont plus elles-mêmes que 2 carrefours libres chacune, deux policiers (2 façons différentes).

Le nombre de solutions possibles est donc : $6 \times 4 \times 2 \times 2 = 96$.

Il convient de comprendre ainsi cette construction, avec support de l'exemple ci-dessus) :

1) comme la construction précédente (ici on choisit ligne 1). Il y a 6 possibilités.
2) comme la construction précédente (ici on choisit la ligne 2). Il y a 4 possibilités.
3) deux lignes exactement ont exactement deux carrefours libres, c'est-à-dire utilisables car n'y passe pas de diagonale ni de colonne déjà surveillée. Ce point n'est pas démontré dans la revue. Comprendre que, sur chaque ligne, les diagonales bloquent deux colonnes systématiquement et que les colonnes bloquées ne sont pas les mêmes suivant les lignes et

Retour au sommaire

que, ainsi, deux lignes ont alors 4 carrefours bloqués : ce sont les lignes pour lesquelles les diagonales ne bloquent pas les mêmes colonnes que celles bloquées par les 2 policiers déjà placés en 1) et 2). (Ici ce sont donc les lignes 3 et 4.). Il y a deux possibilités de placement des deux policiers (le placement de l'un impose la place de l'autre).

4) sur les deux lignes restantes (ici lignes 5 et 6) on place les deux derniers policiers (l'un placé impose la place de l'autre). Il y a 2 possibilités.

Ainsi il y a $6 \times 4 \times 2 \times 2 = 96$ possibilités

Cependant cette construction ne crée que des placements où il y a exactement un et un seul policier sur chaque route diagonale. Ce n'est pas explicitement précisé par l'énoncé, et on peut donc rester insatisfait de cette réponse. On pourra avec bienveillance considérer qu'il y a une erreur d'énoncé dans le magazine (au lecteur d'excuser ou non l'erreur de l'équipe de rédaction du rallye de l'APMEP).

Mais alors ?

La solution au problème posé est donc comprise entre 96 et 576 (et même inférieure ou égale à 573, compte tenu de la remarque sur la configuration comptée 4 fois, et qui n'est bien sûr pas la seule).

Quelle est alors la réponse à la question ?

Tout d'abord, j'admets que je ne parviens pas à décomposer ce problème de dénombrement en sous problèmes, c'est-à-dire à créer une partition de l'ensemble des configurations possibles en des sous-ensembles qu'on puisse dénombrer assez facilement. **Appel est donc lancé aux adhérents pour traiter de manière élégante ce problème.**

La réponse à l'exercice

Cette partie va fournir la réponse à la question. Et ne supprime pas l'appel aux adhérents à répondre. La « subtilité » est bien que c'est un appel à un traitement élégant. Et je ne me résous pas à considérer le traitement suivant comme élégant. Par contre, j'ai passé depuis longtemps le cap et je considère que c'est bien une résolution pertinente de l'exercice.

Comme dans d'autres (tous) problèmes, il convient d'accepter la méthode de recherche exhaustive de toutes les configurations. Pour cet exercice, on peut se mettre d'accord que le nombre de configurations à tester est de $6^6 = 46656$, à raison du placement de chaque policier/caméra sur 6 lignes (et ainsi 6 places possibles pour chacun), qu'on peut améliorer en $6! = 720$ tests (permutations de 6 policiers/caméras sur les colonnes, chacun étant sur une ligne différente). Il s'agit alors de vérifier si chaque configuration testée répond à la contrainte de surveillance. Cela est-il jouable ? Cela fait tout de même beaucoup de grilles à écrire. En pratique la question de la réalisation à la main est à peine posée qu'on peut se poser la question de l'algorithme à poser sur ordinateur. Je ne sais pas engendrer une permutation de n éléments par algorithme en un coût

$n!$, mais seulement en n^n, mais cela reste tout de même accessible à un ordinateur portable. Donc lançons un programme Python qui va calculer cela. Écrivons donc un programme, sans IA.

```
def police() :
    ligne=[0,0,0,0,0,0,0]
    tot=0
    compteur=0
    for a in range(1,7) :
        ligne[1]=a
        for b in range(1,7) :
            if not(b in ligne[1 :2]) :
                ligne[2]= b
                for c in range(1,7) :
                    if not (c in ligne[1 :3])  :
                        ligne[3]=c
                        for d in range(1,7) :
                            if not (d in ligne[1 :4]) :
                                ligne[4]=d
                                for e in range(1,7) :
                                    if not (e in ligne[1 :5]) :
                                        ligne[5]=e
                                        for f in range(1,7) :
                                            if not (f in ligne[1 :6]) :
                                                ligne[6]=f
                                                tot=tot+1
                                                dc=0
                                                dd=0
                                                for i in range(1,7) :
                                                    if ligne[i]==i :
                                                        dd=dd+1
                                                    if ligne[i]==7-i :
                                                        dc=dc+1
                                                    if dc>0 and dd>0 :
                                                        compteur=compteur+1
    return compteur
```

L'exécution `police()` renvoie 270, qui est donc la réponse à la question posée.

Commentaires

— La manière d'engendrer une permutation de 6 policiers/caméras sur les 6 colonnes en 6 boucles imbriquée et complexité 6^6 est le fait d'un programmateur à l'ancienne et peut-être que Python a une routine déjà prête. La gestion à chaque boucle de la liste des colonnes déjà choisies permet de réduire la complexité.

Retour au sommaire

— `dc` et `dd` comptent le nombre de policiers/caméras présents, respectivement, sur la diagonale croissante (ascendante) et la diagonale descendante.

JOURNÉES NATIONALES

Les inscriptions aux Journées Nationales de Toulon 2025 sont ouvertes dans le plan de formation académique et sur le site de l'APMEP.

Pour l'inscription académique, il faut passer par SOFIA et en sélectionnant, dans *Mon espace stagiaire*, *Mon plan de formation individuelle*. Il faudra alors chercher les Journées de l 'APMEP dans *Disciplines d'enseignement*, dispositif 25A0120948, puis se préinscrire.

Pour l'inscription aux ateliers et conférences, il faut créer un compte sur le site des Journées.

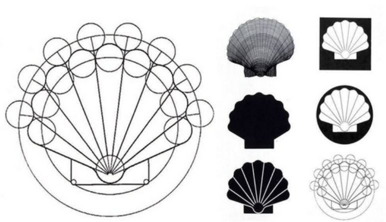
Comme les années précédentes, la régionale tiendra un stand très convivial.
L'atelier « Objets de la Régionale » sera à nouveau proposé pour présenter et faire manipuler les nouveaux objets.

VU SUR LA TOILE

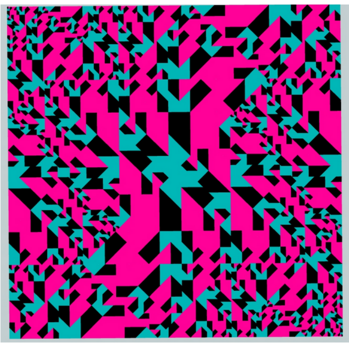
DES MATHÉMATIQUES SUR FACEBOOK

Gilles WAEHREN

Ayant suivi les débuts d'Internet durant mes années d'études, j'ai pu découvrir les premiers réseaux sociaux, en ligne de commande principalement, avec le programme IRC (Internet Relay Chat). Les développements plus récents me semblent ainsi avoir surtout amélioré la variété des contenus et la personnalisation du programme de réseau social. Ainsi, je n'utilise, de nos jours, que deux d'entre eux : WhatsApp pour les échanges avec mes proches et FaceBook pour l'agrégation de contenus. En étant abonné à divers médias d'information traditionnels (ceux de la presse écrite) et d'autres diffuseurs de contenus culturels, on peut s'informer et se distraire à la fois.
Les algorithmes de préférences de FB étant relativement bien écrits, il ne lui a pas fallu longtemps pour repérer mon intérêt pour la chose mathématique. Ainsi me propose-t-il régulièrement des contenus en lien avec différents aspects des mathématiques : éléments de théorie, de didactique et autres curiosités. Les liens ici présentés sont de qualité variable suivant les périodes mais recèlent parfois des pépites. Il faudra un compte FaceBook pour les consulter, même si certains publicateurs sont installés sur d'autres réseaux sociaux. Bien entendu, votre association préférée dispose de sa page FB avec des infos à collecter à tout moment.

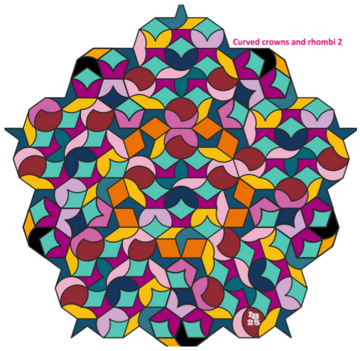


LogoDecks publie régulièrement des fiches sur les logos qui ont émaillé l'histoire de la communication moderne. En plus d'une courte biographie de leur concepteur, les travaux d'élaboration du logo sont quelques fois disponibles. Ils peuvent donner des idées de tracés à réaliser en classe (à droite, Karl Gerstner, créateur du logo Shell).



Math Artists permet à des mathématiciens amateurs d'art de diffuser leurs créations. On peut être plus ou moins sensible à certaines réalisations, mais en tout cas, la multiplicité des productions permet de nous interroger sur la place des mathématiques comme source d'inspiration et modalité de création artistique (à gauche, Ghee Beom Kim, 19 août 2025).

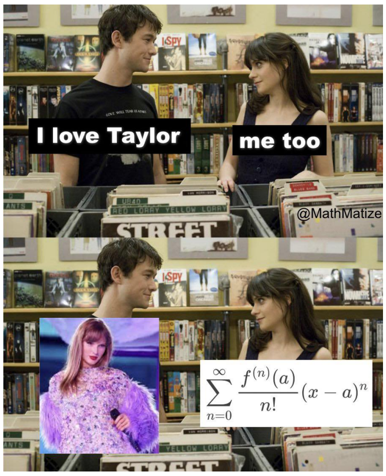
Retour au sommaire



De bien belles choses également chez Mathematical Tiling and Tessellation, qui s'est spécialisé dans le pavage et la tessellation, où l'on retrouve des tracés géométriques ou des constructions dans la vie courante (à droite, Irmi Beyer, couronnes et losanges).

Beyond the brick est avant tout destiné aux amateurs de Lego, petits et grands (mais surtout grands). Lieu de rivalités de constructions audacieuses, on peut aussi y prendre conscience des innombrables possibilités offertes par une petite brique et beaucoup d'imagination, notamment mathématique (à gauche, un hommage à Escher).

Mathematics for all, localisé en Inde, publie des contenus très variés en lien avec les mathématiques, souvent sur le ton de l'humour, mais pas seulement. Au Bangladesh, Mathematics creuse le sillon de mathématiques approfondies et se complaît dans les formules complexes. On a aussi Extra-Maths qui, en plus de vendre une collection de livres, propose régulièrement des énigmes géométriques. Enfin, Meme for mathematicians contribue à la mode des memes sur Internet avec ces relectures mathématiques d'images devenues virales.



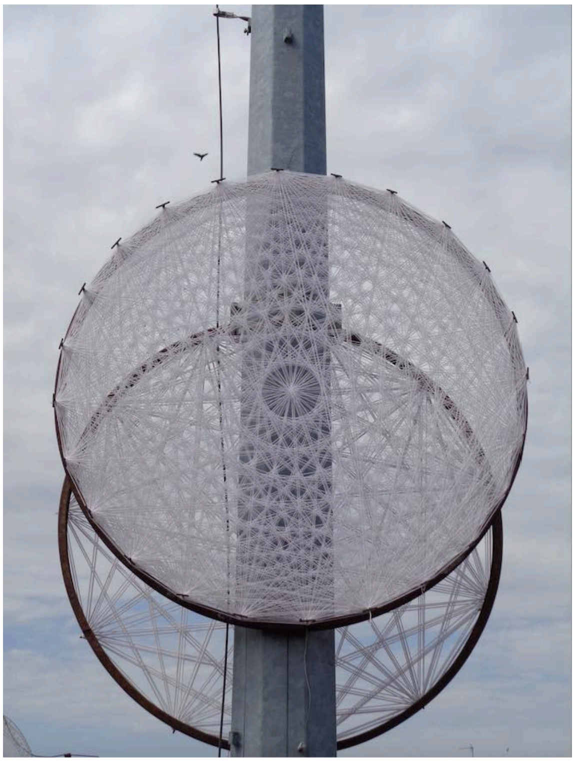
Retour au sommaire

OJOS DE DIOS ET MANDALAS À STENAY

Groupe Maths et Arts - APMEP Lorraine

Le jardin « chez Grandjean » a récemment fêté son centième anniversaire. Armelle, la petite fille du fondateur continue l'aventure. Elle a de plus décoré cette année de bien belle manière le rond-point dit « de la Pierreuse » à Stenay.

Maraichère, horticultrice et chamane, elle s'est inspirée des mandalas issus de l'hindouisme et des *Ojos de Dios* qui appartiennent à la tradition amérindienne.



Retour au sommaire

Circuler autour de ce rond-point et admirer ces créations très géométriques est certainement très bénéfique.

Les trois dernières photos montrent peut-être des attrape-rêves : attention au sommeil au volant !

Retour au sommaire

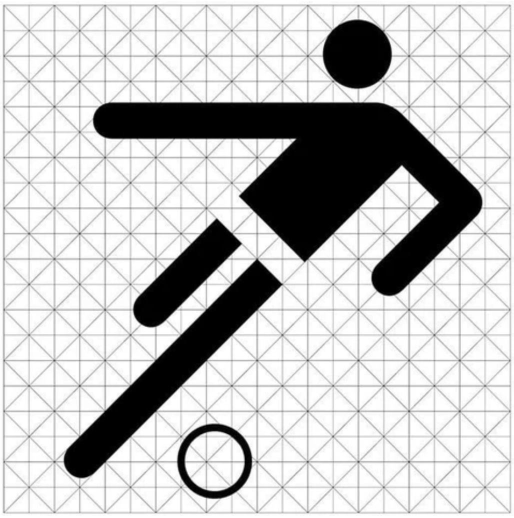
MATHS ET ARTS

OTLE AICHER ET LES JEUX OLYMPIQUES DE MUNICH

Groupe Maths et Arts - APMEP Lorraine

Des échanges entre nous nous ont donné envie d'en savoir plus à propos du créateur de l'univers graphique utilisé lors des Jeux Olympiques de Munich en 1972. Nous pensions nous orienter vers une nouvelle rubrique « Maths et Sports », mais nous avons estimé que ce qu'il avait créé avait toute sa place dans la rubrique « Maths et Arts du Petit Vert.

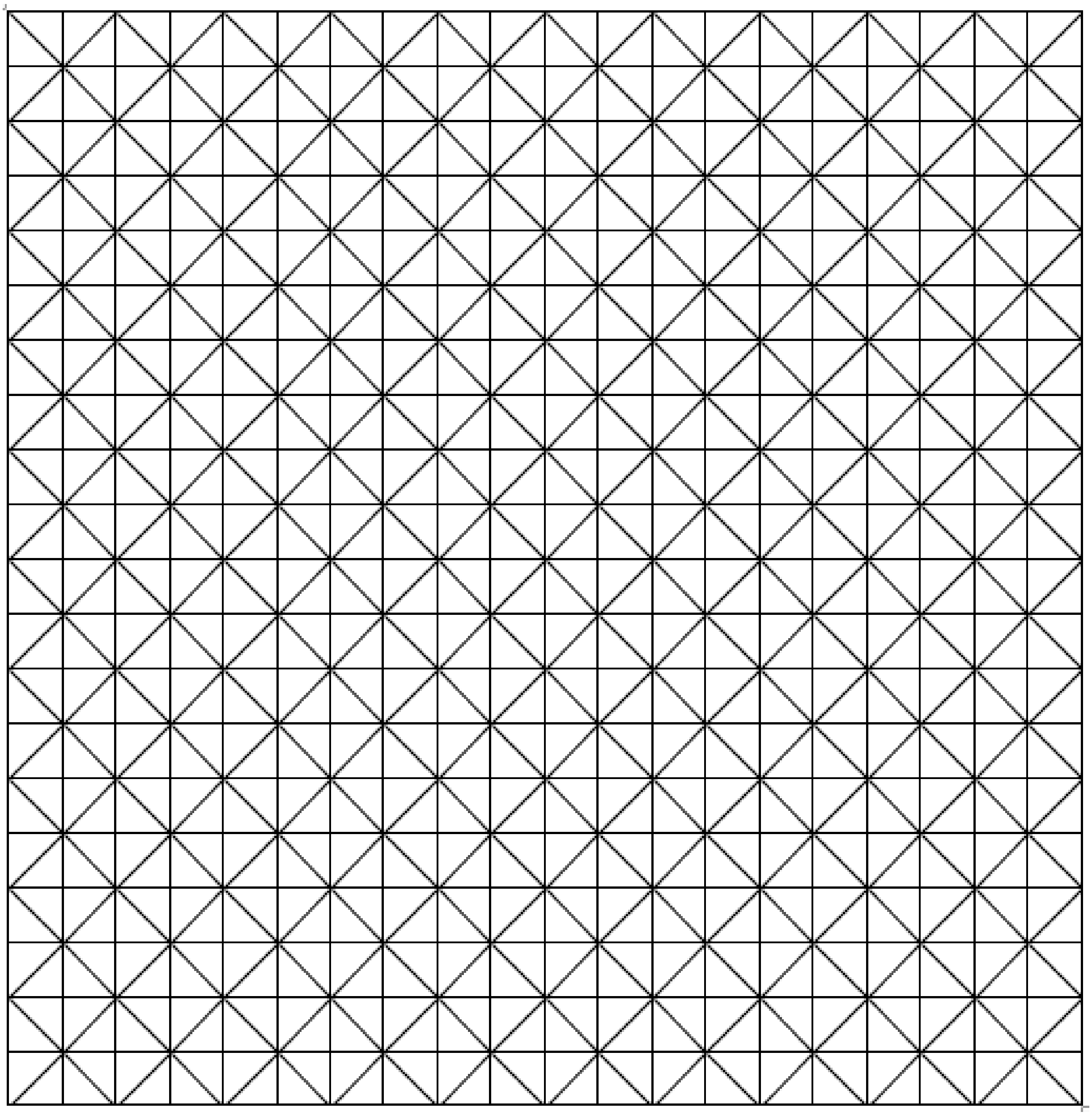
Sur cette photo, Olt Aicher signe (dessine ?) devant des logos qu'il a créés pour les épreuves de ces Jeux Olympiques.



Les sportifs et sportives stylisé-e-s ont été imaginé-e-s en utilisant un quadrillage.

Retour au sommaire

Réussirez-vous à reproduire cette iconographie ?



PORTEMÈTRE : LA PORTE EN BOIS QUI OUVRE LA GÉOMÉTRIE AU MÈTRE PRÈS

Groupe Maths et Arts - APMEP Lorraine

Voici une photo prise aux Imaginales d'Épinal : un portique fait de mètres-rubans jaunes suspendus à une structure en bois. Ne serait-ce pas idéal pour illustrer la notion de **mètre** et de **mesure** ?

Elle peut être utilisée pour

— parler du système métrique (l'idée du mètre-ruban comme référence) ;

— faire le lien « porte » / passage (du problème à la solution, ou d'un espace à un autre) ;

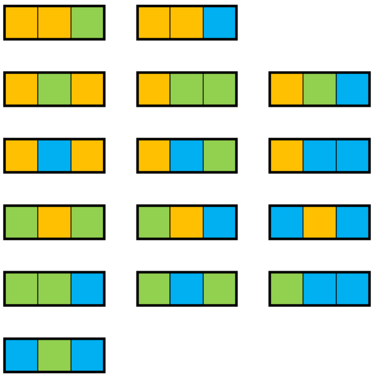
— montrer un croisement maths / art visuel.

Un souhait : que notre passion pour les mathématiques franchisse toujours les bonnes portes… au mètre près.

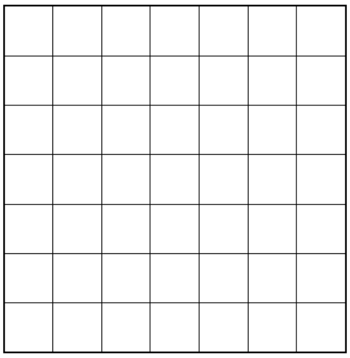
Retour au sommaire

QUINZE TRIMINOS COLORÉS

Groupe Jeux - APMEP Lorraine

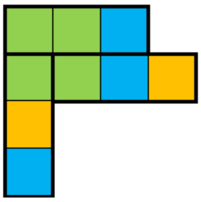


Les pièces

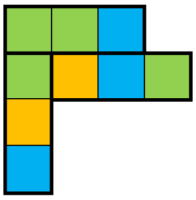


Le plateau de jeu

Deux pièces doivent être accolées en juxtaposant des carrés de couleurs identiques.



OUI

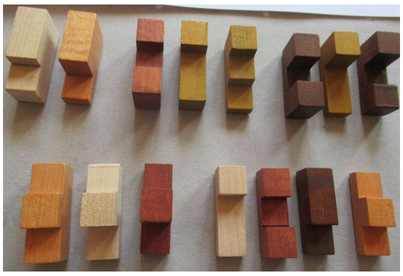


NON

Le but du jeu est de placer le maximum de pièces sur le carré formant le plateau de jeu.

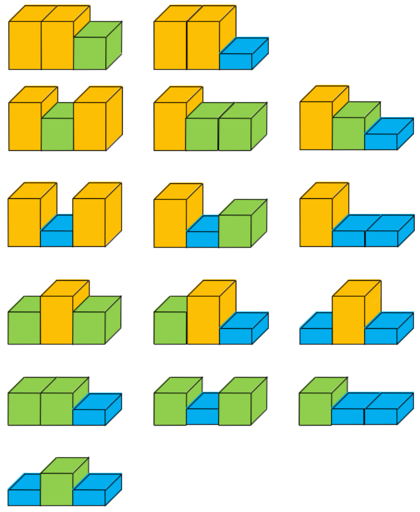
Ces 15 pièces font partie des 75 triminos du jeu « CHROMINO » actuellement édité chez « asmodee ».

Guy Jeandel a imaginé le jeu « Chorus
textsuperscript® » en 1999. En 2025, il semble que ce jeu n'est plus commercialisé.



Le créateur de ce jeu utilise trois hauteurs pour les pavés formant les pièces.

Retour au sommaire

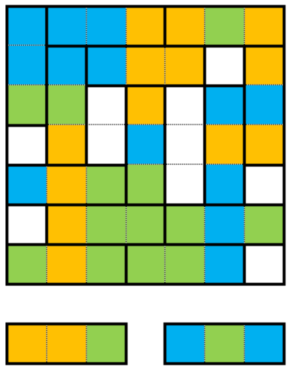


Vues du dessus, les pièces de cette variante permettent de visualiser les 15 triminos choisis.

Dans la règle du jeu de « Chorus® », des défis utilisant 11, 12 ou 13 pièces sont indiqués.

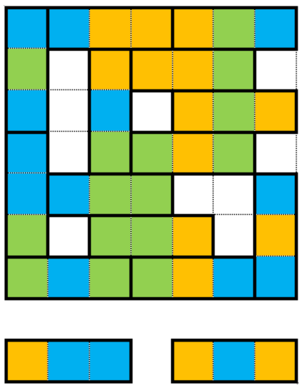
Il est également proposé de ne pas utiliser une ou deux pièces, au choix du joueur. Il est dit que quelles que soient les deux pièces non utilisées, les treize pièces restantes pourront être placées : au moins 15x14 défis en perspective…

Douze pièces placées en utilisant des pièces en carton



Exemple de solution fournie avec la règle du jeu de « Chorus® »
Des permutations de couleurs nous assurent que cette solution n'est pas unique.

Trois défis à partir d'une autre solution avec treize pièces placées



En permutant des couleurs, combien d'autres solutions seront trouvées ?
En permutant deux pièces placées sur le plateau, une autre solution est obtenue. Quelles pièces seront permutées ?

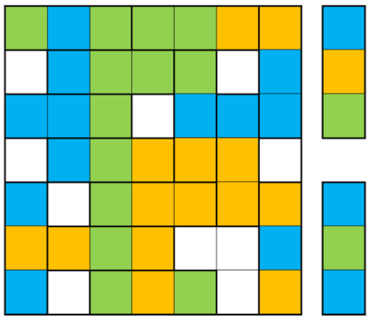
Retour au sommaire

En permutant une des deux pièces non placées avec une des pièces placées sur le plateau, une autre solution est obtenue. Quelles pièces seront permutées ?

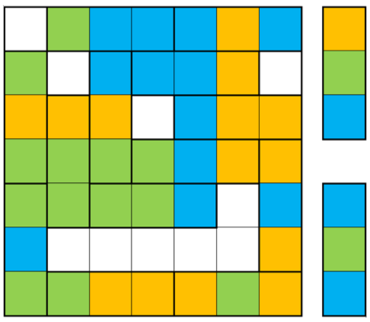
Un stand supplémentaire pour notre exposition d'objets mathématiques est en projet.

Prolongements

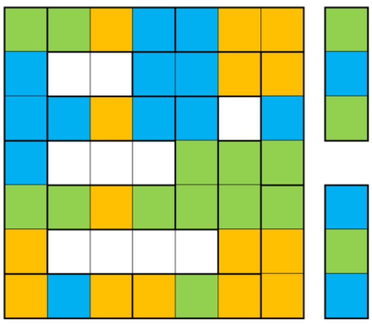
Des échanges entre joueurs et joueuses de l'APMEP ont fait apparaître des dispositions particulières.

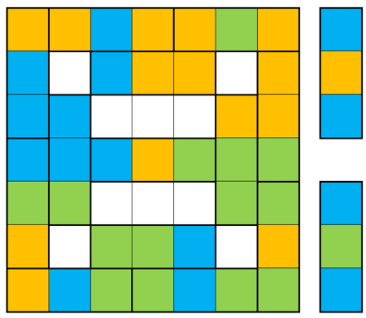


Cette solution trouvée à Niort montre une zone verte composée de 11 carreaux (9 d'entre eux sont alignés sur une colonne) et 7 cases « isolées » non recouvertes.

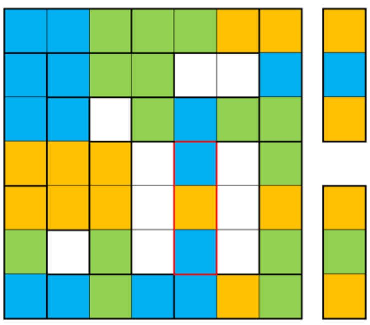


Dans cette autre solution trouvée à Niort une zone connexe formée de six cases n'a pas été recouverte.





Dans ces solutions trouvées en Meuse, les cases non recouvertes visualisent « 1+2+3+4 » dans le premier cas et une configuration riche en symétries dans le second.



Dans cette autre solution, la pièce entourée en rouge peut être remplacée par une des deux pièces non utilisées mais placée horizontalement.

Retour au sommaire

Nouveaux défis

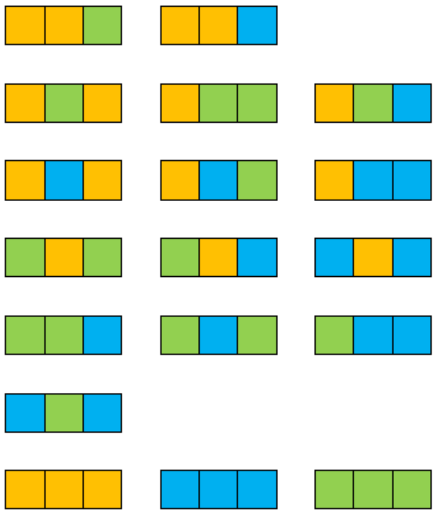
Trouver d’autres assemblages possédant des positions remarquables des pièces ou des carrés non recouverts.
Retrouver le placement des pièces à partir d’un dessin ne comportant pas leur pourtour. Des propositions sont accessibles sur notre site.
Par permutation des couleurs, combien peut-on obtenir de nouvelles solutions ?
Pourquoi ne peut-on pas placer plus de 13 pièces ?
Concernant ces deux dernières questions, des réponses nous sont parvenues de l’Ariège.

Avec d’autres pièces

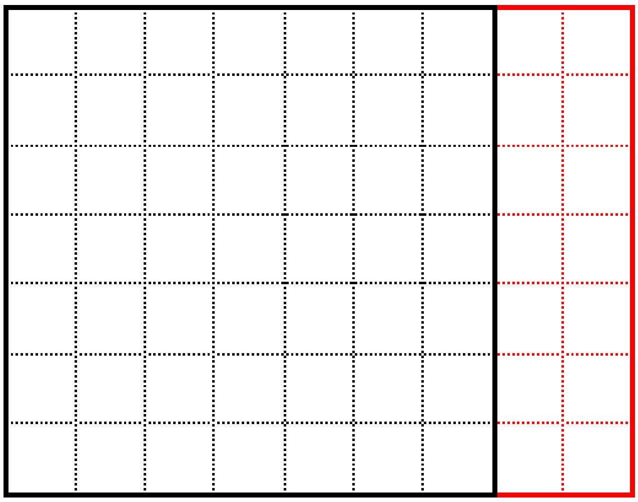
Le créateur du jeu « Chorus® » n’a pas utilisé les trois pièces unicolores. Utilisons-les, nous obtenons un total de 18 pièces.

$$18 \times 3 = 54 = 6 \times$$

En gardant les mêmes contraintes de placement, combien de pièces réussira-t-on à placer dans un rectangle 6×9 ?



Le plateau de « Chorus® » est un plateau de 7×7 cases.
Puisque nous utilisons trois pièces supplémentaires, agrandissons le plateau.



En gardant les mêmes contraintes de placement, combien de pièces réussira-t-on à placer dans un rectangle 7×8 ? dans un rectangle 7×9 ?

Les recherches continuent.

Retour au sommaire

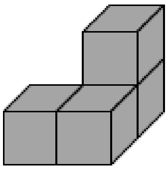
TROIS TÉTRACUBES ET TROIS PENTACUBES POUR UN CUBE (PARTIE 2)

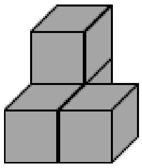
Groupe Jeux

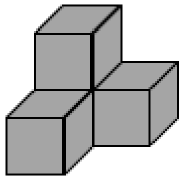
Dans le Petit Vert n°159, la recherche s'était limitée à l'utilisation de tétracubes et pentacubes « plats » pouvant être utilisés pour former un cube $3 \times 3 \times 3$.
Des rangements faits en 2024 nous ont fait retrouver une proposition de Claude Pagano datant de 1993. Il n'est jamais trop tard pour l'informatisation et la diffusion de ses propositions très originales : l'utilisation de certains pentacubes non plats n'est pas très courante.

Les pièces utilisées.

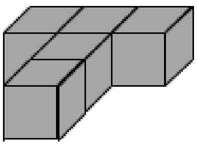
Les trois tétracubes non plats



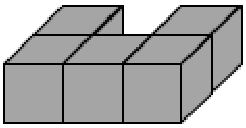




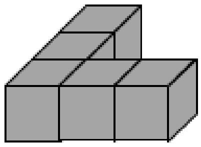
Les six pentacubes plats admettant un élément de symétrie



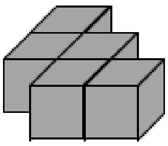
Le T



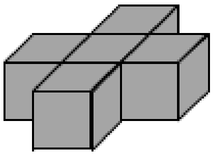
Le U



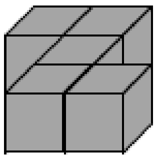
Le V



Le W

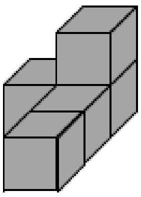


Le X

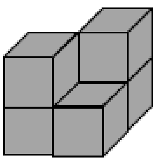


Le Z

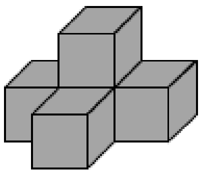
Les cinq pentacubes non plats admettant un élément de symétrie



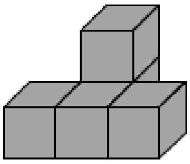
Le B



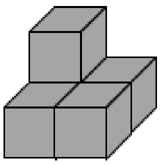
Le M



Le K



Le J



Le Q

Retour au sommaire

$3 \times 4 + 3 \times 5 = 27$

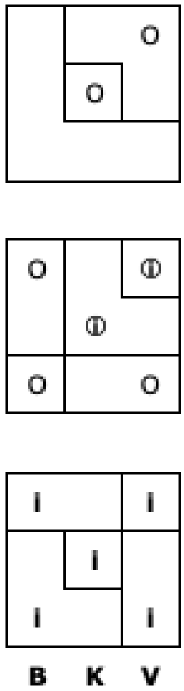
Pour obtenir un cube $3 \times 3 \times 3$, les trois tétracubes non plats sont utilisés ainsi que trois pentacubes parmi les $6+5$ pentacubes admettant un élément de symétrie. En théorie, 165 assemblages sont envisageables. Claude Pagano a envoyé une liste de 47 assemblages. Fin 2024, *Polysolver* nous en a annoncé 53, il y en avait donc 6 non encore trouvés à l'époque.

L'ensemble des 53 possibilités est téléchargeable sur notre site.

Codage des solutions

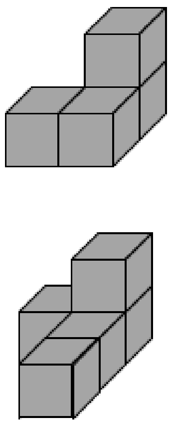
Les trois couches de cubes des assemblages sont représentées. « O » signifie que la pièce se prolonge vers le bas, « **i** » signifie que la pièce se prolonge vers le haut et « i » signifie que la pièce se prolonge vers le haut et vers le bas.

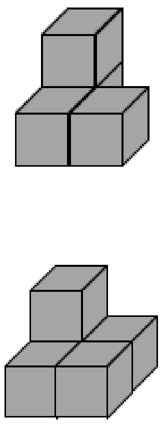
Voici ci-contre un exemple utilisant les trois tétracubes ainsi que les pentacubes B, K et V.

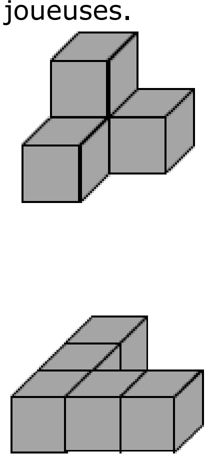


Avec les pentacubes B, Q et V

Polysolver nous indique également le nombre de solutions pour chaque assemblage. « BQV » est celui qui en a le plus : il est peut-être accessible à de jeunes joueurs et joueuses.

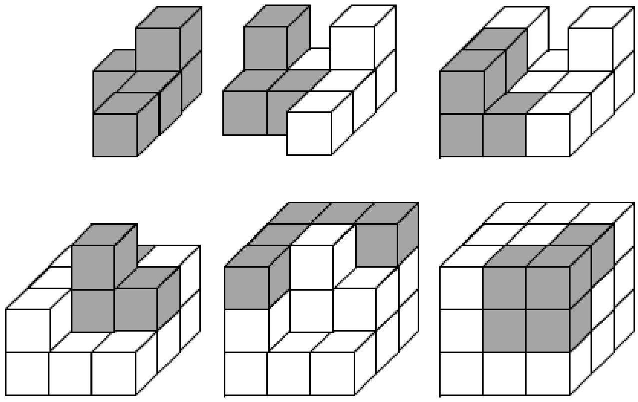

Le B


Le Q

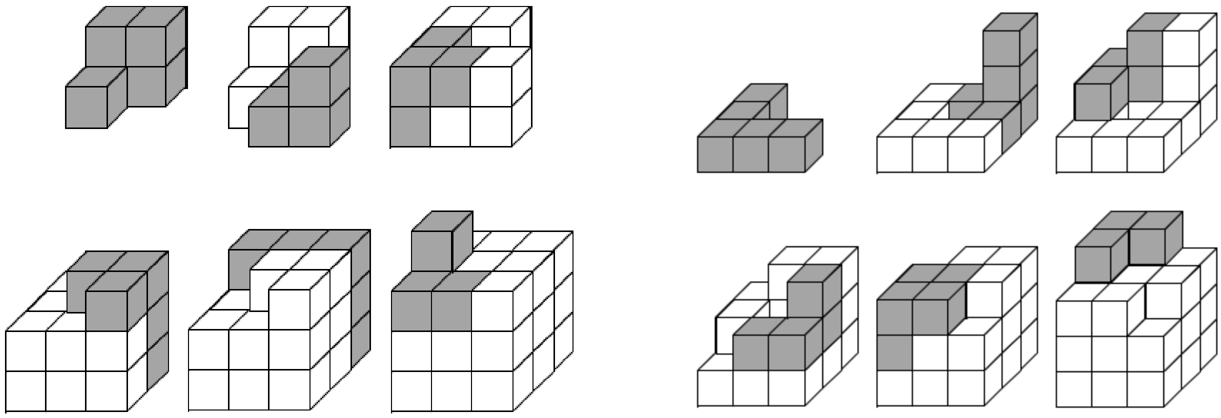

Le V

Voici une des façons de réaliser le cube.

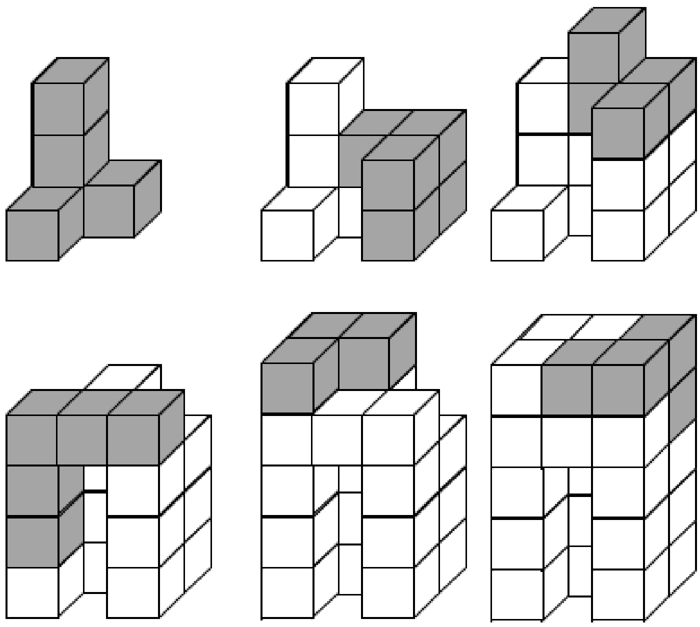
Retour au sommaire



Surprenant ?



La porte est ouverte vers d'autres créations…



DEUX CHIFFRES APRÈS LA VIRGULE ?

Dans le programme de mathématiques en cycle 3 mis en œuvre en septembre 2025, nous pouvons lire :

1) Au CM1, les nombres décimaux rencontrés ne vont pas au-delà des centièmes et s'écrivent donc avec au plus deux chiffres après la virgule.

Remarque : ce ne sont pas les nombres décimaux qui ne vont pas au-delà des centièmes, mais leurs écritures. Celles-ci seront rencontrées lors de prix évoqués en classe. L'exemple ci-dessous est extrait du cahier d'exercices « Entiers et décimaux : problèmes » édité par Sésamaths pour la classe de sixième.

8 Aurélie achète 5 pots de confitures à 1,80 € pièce et 12 baguettes de pain à 0,70 € pièce. Quel est le prix total qu'elle doit payer ?

Nous avons envie d'aller faire un petit tour dans les documents diffusés par des chaines de supermarchés.

Dans un document édité par la chaine de magasins « ALDI »

Où est la virgule ?

Où est la virgule ? Pour quelle monnaie ?

Dans un document édité par la chaine de magasins « E.LECLERC »

Où est la virgule ?

Dans un document édité par la chaine de magasins « Gamm vert »

La virgule est là, mais l'unité monétaire est curieusement placée.

Retour au sommaire

Dans un document édité par la chaine de magasins « ACTION »

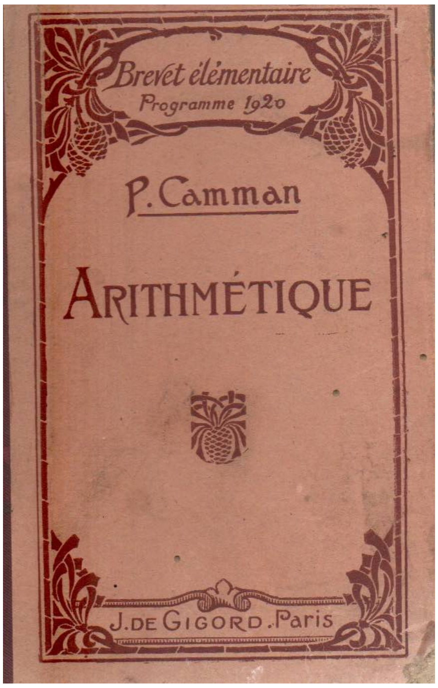
Dans un document édité par la chaine de magasins « LIDL »

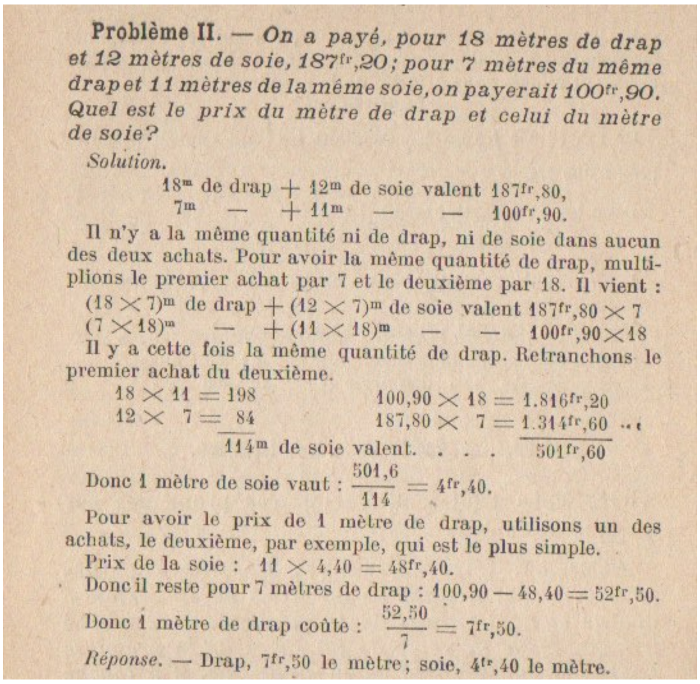
Pour ces deux chaines de magasins, nous ne pourrons pas dire que la virgule est à l'honneur.

Restons positifs : D'ici à ce que les élèves de Cycle 3 aient à consulter ce type de document, des années auront passé, les écritures des prix auront peut-être évolué.

Ce serait dommage qu'ils constatent alors que ce qui leur a été montré et enseigné à l'école reste assez éloigné de ce qu'ils croisent dans leur « vie courante » actuelle…

Un complément





Problème II. — *On a payé, pour 18 mètres de drap et 12 mètres de soie, 187^{fr},20; pour 7 mètres du même drap et 11 mètres de la même soie, on payerait 100^{fr},90. Quel est le prix du mètre de drap et celui du mètre de soie?*

Solution.

18^m de drap + 12^m de soie valent 187^{fr},80,
7^m — + 11^m — — 100^{fr},90.

Il n'y a la même quantité ni de drap, ni de soie dans aucun des deux achats. Pour avoir la même quantité de drap, multiplions le premier achat par 7 et le deuxième par 18. Il vient :

$(18 \times 7)^m$ de drap + $(12 \times 7)^m$ de soie valent 187^{fr},80 × 7
$(7 \times 18)^m$ — + $(11 \times 18)^m$ — — 100^{fr},90 × 18

Il y a cette fois la même quantité de drap. Retranchons le premier achat du deuxième.

18 × 11 = 198 100,90 × 18 = 1.816^{fr},20
12 × 7 = 84 187,80 × 7 = 1.314^{fr},60
114^m de soie valent. . . . 501^{fr},60

Donc 1 mètre de soie vaut : $\frac{501,6}{114} = 4^{fr},40$.

Pour avoir le prix de 1 mètre de drap, utilisons un des achats, le deuxième, par exemple, qui est le plus simple.

Prix de la soie : 11 × 4,40 = 48^{fr},40.

Donc il reste pour 7 mètres de drap : 100,90 — 48,40 = 52^{fr},50.

Donc 1 mètre de drap coûte : $\frac{52,50}{7} = 7^{fr},50$.

Réponse. — Drap, 7^{fr},50 le mètre; soie, 4^{fr},40 le mètre.

Dans ce livre édité en 1927, les sommes exprimées en francs sont écrites comme elles étaient dites par les utilisateurs et utilisatrices.

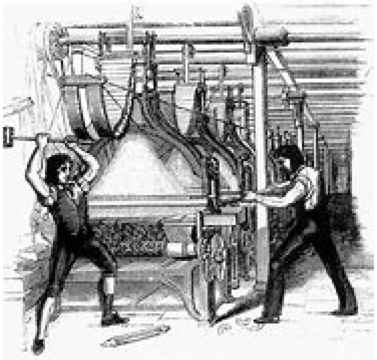
Retour au sommaire

MATHS ET PHILO

LE LUDDISME

Didier LAMBOIS

Connaissez-vous Ned Ludd ? Non ? Moi non plus, pour la bonne raison qu'il n'a probablement pas existé, c'est du moins ce qu'affirme l'historien François Crouzet (1922-2010). Pourtant Ned Ludd a beaucoup fait parler de lui au début du XIXème siècle ; il a écrit de nombreuses lettres de menace et a revendiqué la destruction de nombreuses machines, en particulier des métiers à tisser.



Nous sommes en Angleterre, au début de la révolution industrielle. Les machines à tisser, mises au point par Edmund Cartwright (1743-1823), ont multiplié par 20 la productivité des ouvriers, et ces ouvriers n'ont plus besoin de compétences spécifiques. La qualité des produits est aussi améliorée. Les artisans tisserands, tondeurs de draps, tricoteurs, jusqu'alors reconnus, sont condamnés à disparaître, ils sont disqualifiés. Dans un dernier sursaut, et pendant plusieurs années (1810-1817), ils vont se révolter et chercher à briser le plus grand nombre de machines possibles. Signant leurs actes du nom de Ned Ludd, ils seront nommés les luddites [1].

Quelques dizaines de pendaisons et de nombreuses déportations en Tasmanie mettront un terme à ces révoltes, mais le luddisme ne disparaît pas pour autant, il est encore d'actualité.

Dans un excellent article consacré au néo-luddisme, Jean Marie Pottier montre que les briseurs de machines restent actifs :

La cérémonie s'est répétée deux fois à un mois d'intervalle, à l'automne 2023, sur les deux côtes des États-Unis. La première, dans un bar de Bushwick, un quartier branché de New York. La seconde, dans un centre communautaire de Oakland, dans la baie de San Francisco. À chaque fois, le scénario de la soirée est le même. Un groupe d'essayistes, de journalistes et d'activistes entretient le public des bénéfices et des effets pervers d'un certain nombre d'objets high-tech, avant de passer aux travaux pratiques. À la fin, un cercle se forme, de lourdes masses sortent des sacs à dos et plusieurs objets - un téléphone portable, une imprimante laser, une caméra de surveillance, un poster réalisé à l'aide d'une intelligence artificielle génératrice d'images - finissent réduits en miettes. Le nom de la soirée ? Le Luddite Tribunal [2].

Et cet exemple n'est pas le seul. En France, dans les années 1980, plusieurs attentats contre des groupes informatiques avaient eu lieu ; ces sabotages étaient revendiqués par le groupe « CLODO », acronyme du Comité Liquidant ou Détournant des Ordinateurs.

1. En France, la révolte des canuts, dans les années 1830, n'est pas à strictement parler une révolte contre les machines. Il s'agit plutôt de revendications salariales et politiques. Mais en 1819 il y avait eu aussi des émeutes à Lyon pour briser les nouvelles machines comme le métier à tisser inventé par Jacquard (1752-1834).
2. Sciences Humaines n°374, décembre 2024. *A l'âge de l'IA, faut-il briser nos machines ?*

Retour au sommaire

Toutes ces violences sont condamnables, comme toute violence, et elles se trompent peut-être d'ennemi, comme le dit Marx[3], mais elles ont le mérite de nous faire réfléchir à ce qu'est la technique et à la place que prend aujourd'hui la technologie[4] dans nos vies. Quelle doit-être notre attitude face à la technique ?

La technique

Le mot grec « *tecknê* » est l'équivalent du mot latin « *ars* ». Ces deux termes indiquent le savoir-faire, l'art, la technique, et nous utilisons parfois encore l'un pour l'autre. Mais l'art et la technique se différencient par les moyens mis en œuvre et par leur finalité. Si l'art relève du talent et n'a pas de finalité pratique, la technique repose au contraire sur un savoir précis, une science, et elle cherche à nous rendre plus efficaces ; elle veut nous donner des moyens plus performants pour agir. Certains penseurs y voient l'expression aboutie de l'intelligence humaine ; d'autres la considèrent au contraire avec mépris, n'y voyant qu'une conséquence d'un besoin vital relevant de notre animalité. Des activités comme la philosophie, les mathématiques ou l'art seraient bien plus dignes de notre humanité[5].

Quoiqu'il en soit, la technique est là, et elle occupe aujourd'hui une place importante dans notre vie, elle nous donne un pouvoir et a peut-être sur nous un pouvoir qui nous préoccupe et parfois nous fait peur.
Si la technique inquiète c'est parce qu'elle a changé de statut. Elle n'est plus un outil pour agir sur le monde. Elle n'est plus le prolongement de notre corps et de notre intelligence qui nous permettrait de devenir « *comme maîtres et possesseurs de la nature* » pour reprendre les mots de Descartes (1596-1650), elle n'est plus un intermédiaire entre nous et le monde, elle est devenue le monde dans lequel nous évoluons. Elle est partout ; d'un coup d'éponge elle a effacé la nature et nous craignons qu'elle ne nous efface aussi. Omniprésente, elle est aussi omnipotente et nous nous inclinons face à sa puissance.

Le numineux

Notre attitude face à la technique est assez proche de celle décrite par le théologien allemand Rudolf Otto (1869-1937) dans son ouvrage intitulé *Le Sacré* (1917). Dans cet ouvrage il propose d'utiliser le terme « numineux » (du latin *numen* : puissance divine) pour désigner ce qui se présente à nous sous la forme d'une puissance mystérieuse, à la fois fascinante et terrifiante,

3. *« Il faut du temps et de l'expérience avant que les ouvriers ayant appris à distinguer entre la machine et son emploi capitaliste, dirigent leurs attaques non contre le matériel de production mais contre son mode social d'exploitation. »* Marx, *Le Capital*, Livre I, 4.

4. Le terme « technologie » devrait désigner le discours (logos), l'étude de la technique, mais il est souvent utilisé comme synonyme de « technique » et plus précisément pour désigner les techniques de pointe.

5. Certains enseignants ont encore tendance à considérer que l'orientation vers des filières technologiques est un échec. Une formation « classique » est bien plus noble, et le mot l'indique : c'est la classe !

Retour au sommaire

une puissance qui dépasse notre entendement, puissance irrationnelle que nous vénérons et que nous craignons.

Face à la machine
l'homme reste perplexe et inquiet[6]

Le numineux est à la fois un pôle d'attraction et de répulsion, et face à lui nous mesurons notre finitude, notre petitesse et notre impuissance. C'est là que nous faisons l'expérience du sacré. Face à lui nous subissons une forme d'humiliation, nous sommes condamnés à l'humilité, ou bien nous choisissons des attitudes « sacrilèges », par la profanation ou, face à la technique, en brisant des machines par exemple.

La sacralisation de la technique s'est accompagnée d'une désacralisation de la nature et peut-être même d'une désacralisation de l'humain. Le culte de l'efficacité et le dogme du progrès nous font oublier la nature, et même si nous nous sentons souvent coupables à son égard, même si nous déplorons certaines attitudes sacrilèges vis-à-vis de ce qui a été longtemps notre « mère nature », c'est aujourd'hui de la technique que nous attendons notre salut. Mais faut-il croire en cette force aveugle, car nous le savons, elle ne nous regarde pas et n'a pour perspective que de s'accroître ?

En redéfinissant notre environnement, en l'artificialisant, la technique redéfinit aussi l'éthique et la science. Qu'est-ce qui est bien ? L'efficacité, la rapidité, la précision, l'utilité, le rentable etc. Ces valeurs se sont substituées aux valeurs judéo-chrétiennes et républicaines, la fraternité, l'égalité, la liberté. De même pour la science. Que devons-nous chercher à savoir ? Non plus ce qui nous élève mais ce qui est utile.

« La tâche de la science actuelle ne consiste (…) plus à découvrir l'essence secrète et donc cachée du monde ou des choses, ou encore les lois auxquelles elles obéissent, mais à découvrir le possible usage qu'ils dissimulent. L'hypothèse métaphysique des recherches actuelles est donc qu'il n'y a rien qui ne soit exploitable. » dit Gunther Anders[7].

L'école elle-même est emportée par la puissance de cette déesse-technique. Que cherchons-nous à faire sinon à préparer nos enfants à ce nouveau monde, à les adapter ? Et nous avons raison de le faire, car nous savons que nous ne pouvons résister, le progrès ne fera pas marche arrière[8], et quand bien même nous briserions des machines il en viendra d'autres. Mais ce que nous pouvons et devons changer c'est notre regard sur les machines, car c'est ce regard qui est dangereux, bien plus que les machines elles-mêmes.

6. En 1997 Garry Kasparov (ici sur l'image), champion du monde d'échecs, s'est incliné devant la machine Deeper Bue, un ordinateur qui pesait 1,4 tonne et était capable de calculer de 100 à 300 millions de positions par seconde. Mais depuis, la miniaturisation a fait des progrès, les performances aussi, du moins celles de la machine.

7. Gunther Anders (1902-1992) est un philosophe allemand, puis autrichien, qui a consacré de nombreux ouvrages à la critique de la technologie. Certains titres expriment clairement sa position : *L'obsolescence de l'homme, Hiroshima est partout, La menace nucléaire, L'humain étranger au monde, Et si je suis désespéré que voulez-vous que j'y fasse ?* etc. Autant d'ouvrages qui sont des cris d'alerte.

8. Le progrès technique, c'est comme le vélo, il n'a pas de marche arrière.

Retour au sommaire

« Ce n'est pas la technique qui nous asservit mais le sacré transféré à la technique » dit Jacques Ellul[9].

Ne restons pas à genoux mais ne nous trompons pas d'ennemi. L'ennemi c'est d'abord nous, puis le système que nous cautionnons, en consommant, en consommant, et en nourrissant quelques prophètes milliardaires qui ont su faire de la technique et de l'argent qu'elle génère un instrument de pouvoir. Il ne faut pas briser les machines, il faut briser les idoles.

9. Philosophe, juriste, sociologue, théologien libertaire, Jacques Ellul (1912-1994) a consacré de nombreux ouvrages à la révolution technique du XXème siècle, en particulier *Le Système technicien* (1977).

Retour au sommaire

MATHS ET MÉDIAS

MATH & MEDIA

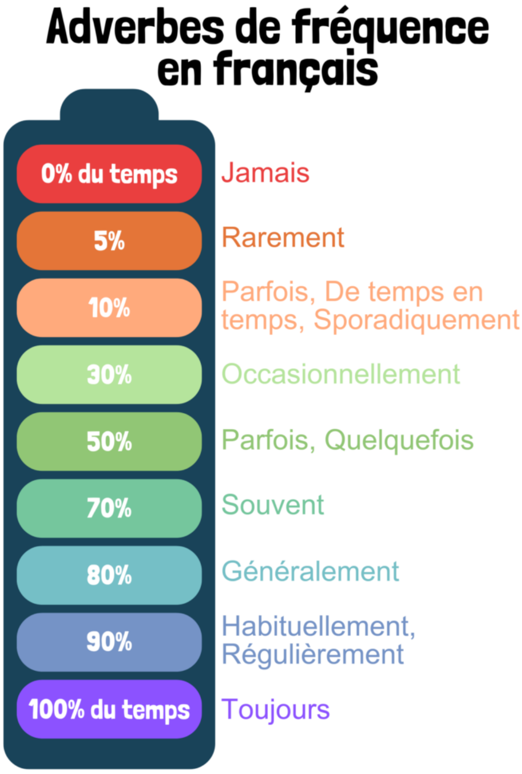
Cette rubrique est alimentée par les envois de nos lecteurs. Qu'ils continuent à le faire en nous envoyant à notre adresse des scans de qualité, en précisant leurs sources.
Des commentaires et des activités possibles en classe sont toujours les bienvenus.

ADVERBES DE FRÉQUENCE

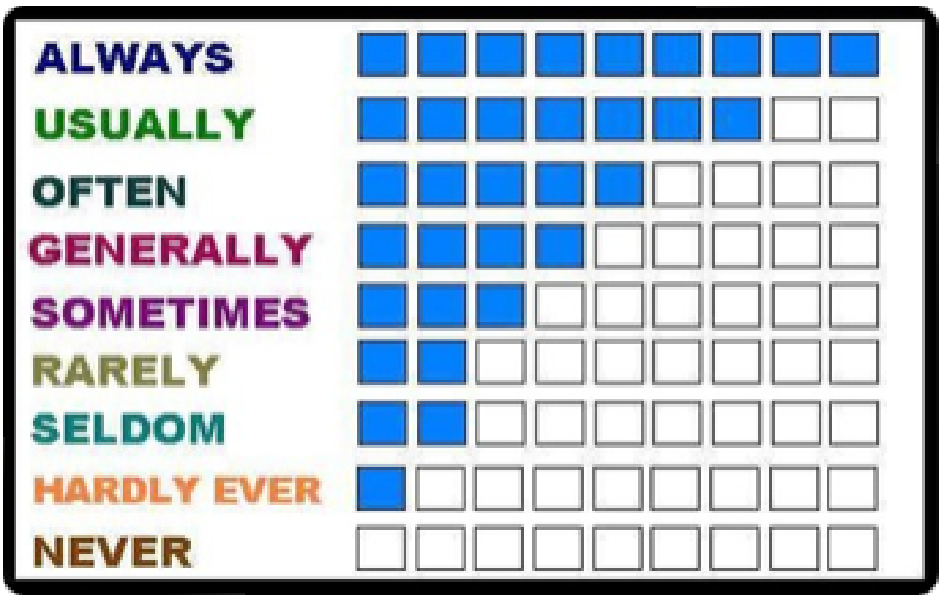
Retour au sommaire

Un de nos lecteurs a repéré cette infographie sur le groupe Facebook « *English with Rani Mam* ». Les adverbes sont associés à des fréquences exprimées en pourcentages.

Nous ne savons pas comment ceux-ci ont été obtenus.
Nous retrouvons des iconographies semblables pour le français et l'espagnol, avec des pourcentages différents de ceux utilisés en anglais, mais tout autant non justifiés.

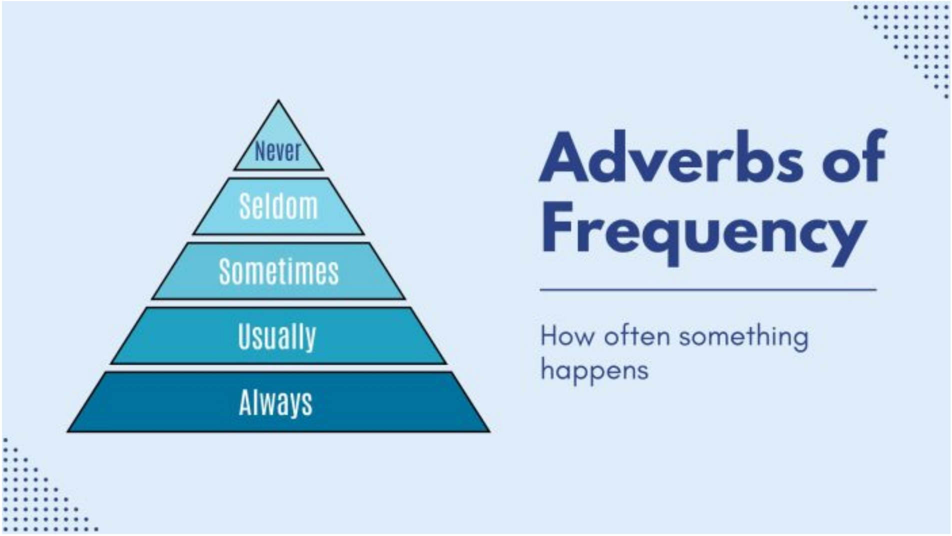


Nous avons poursuivi nos recherches sur la Toile.

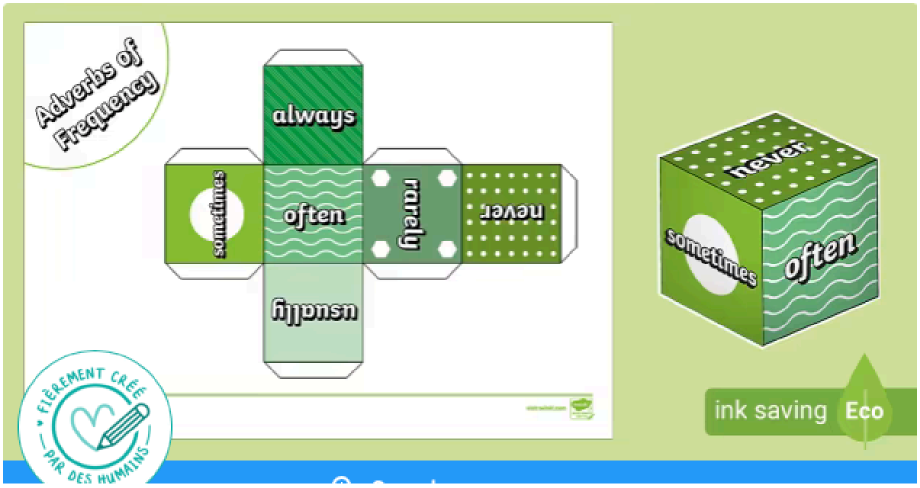


Sur ce site, « ***ALWAYS*** » est représenté par 9 carrés bleus. Il est alors aisé de retrouver les pourcentages pouvant être associés aux autres adverbes.

Retour au sommaire



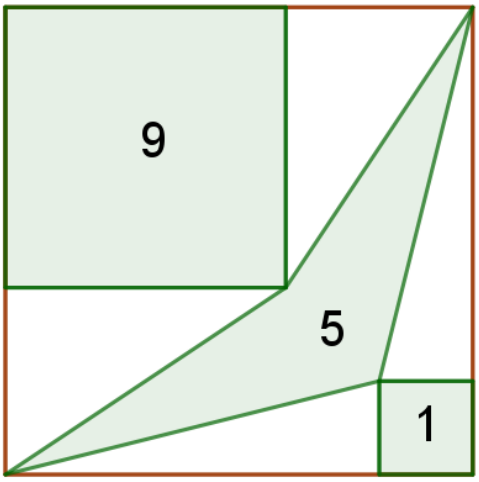
Le schéma fourni par cet autre site nous donne envie de nous poser la question « Combien de fois *Always* est-il plus fréquent que *Never* ? ».



Pour cette autre visualisation, les adverbes indiqués sur les faces du dé représentent-ils des événements équiprobables ? Ou faut-il piper le « dé » ?

Retour au sommaire

DÉFI 163 - 1
L'AIRE D'UN CARRÉ



Trouver l'aire du grand carré.

DÉFI 163 - 2
RIEN N'EST IMPOSSIBLE, SAUF...

Au printemps 2025, les nouveaux programmes de cycle 3 sont parus, les spécimens sont arrivés. L'un d'entre eux était accompagné de ce sac en tissu.

Voici une question à poser à nos élèves :

En Mathématiques, n'y a-t-il que « diviser par zéro » qui est impossible ?

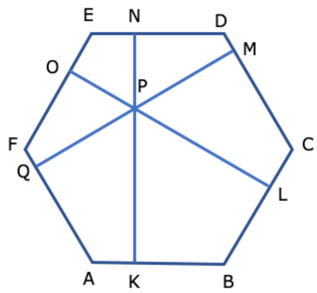
Le Petit Vert sera ravi de collecter les réponses obtenues.

Retour au sommaire

SOLUTION DÉFI 162 - 1 : P DANS L'HEXAGONE

Énoncé

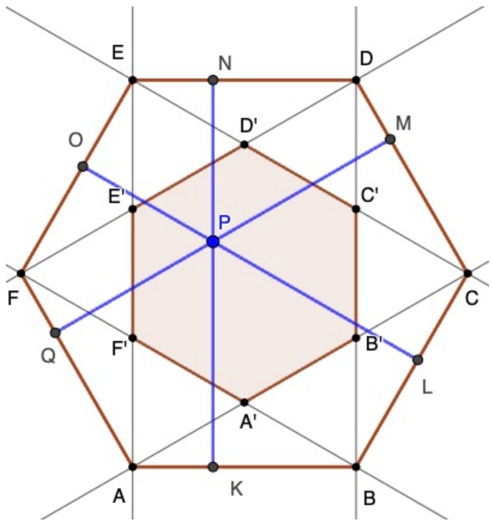
ABCDEF est un hexagone régulier de côté 4cm.
Le point P est à l'intérieur de l'hexagone.



1) Où placer le point P pour pouvoir tracer la perpendiculaire à chacun de ses cotés ?

2) Exprime en centimètres la somme des longueurs PK + PL + PM + PN + PO + PQ.

Éléments de réponse



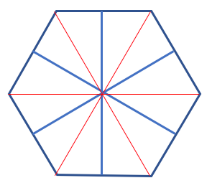
Une figureGeoGebra est en ligne.

1) Le point P doit être à l'intérieur de l'hexagone A'B'C'D'E'F' pour que les points K, L, M, N, O et P existent.

2) GeoGebra nous aide à émettre l'hypothèse que la somme des longueurs PK + PL + PM + PN + PO + PQ est constante.

$\text{PK} + \text{PL} + \text{PM} + \text{PN} + \text{PO} + \text{PQ} = (\text{PK} + \text{PN}) + (\text{PL} + \text{PO}) + (\text{PM} + \text{PQ}) = \text{BD} + \text{BF} + \text{AC} = 3\text{AC} = 3\text{x}4\sqrt{3}\ \text{cm} = 12\sqrt{3}\ \text{cm}.$

AC est égal à deux fois la hauteur d'un des six triangles équilatéraux formant l'hexagone régulier.

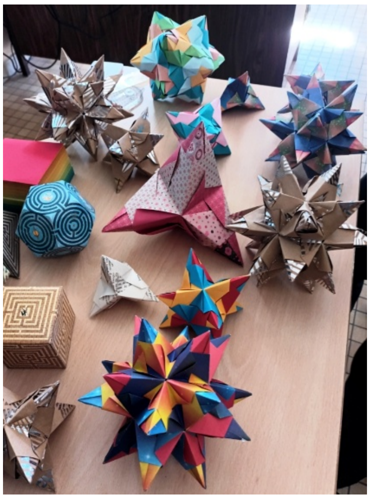


Retour au sommaire

SOLUTION DÉFI 162 - 2 : ON SE PIQUE AU JEU

Défi proposé par Françoise Bertrand et Christine Oudin

Rappel de l'énoncé



Lors de la journée régionale de Lorraine 2025 Françoise Bertrand et Christine Oudin ont présenté la réalisation de solides de Platon étoilés en origami.
Elles ont étoilé les solides de Platon en construisant sur chaque face du solide une pyramide ayant pour base la face du solide de Platon.

Le ballon de foot n'est pas un solide Platon. Le ballon de foot traditionnel est constitué de 20 hexagones et 12 pentagones, c'est un icosaèdre tronqué.
Ce ne sont plus les faces qu'on étoile, on met une pointe à chaque sommet.
Les animatrices de l'atelier nous ont laissé un tuto permettant de comprendre comment construire les pointes.
Combien de modules doit-on préparer pour réaliser le ballon de foot étoilé ?

Le montage de cinq modules

Le ballon de foot étoilé est terminé

Éléments de solution issus de nos échanges avec Christine et Françoise

Question préalable à poser aux élèves : combien un icosaèdre tronqué (ballon de foot) possède-t-il de sommets ? : 60.

Retour au sommaire

20 hexagones, cela nous fait 120 sommets

12 pentagones cela nous fait 60 sommets

Donc un total de 180 sommets.

Et comme chaque sommet est compté trois fois, on a : 180 sommets divisés par 3 soit 60 sommets.

Pour le « ballon de foot » ce n'est plus le même principe que celui qui a été présenté lors de l'atelier car ce ne sont plus les faces que l'on « étoile » car sinon on aurait des pyramides à base hexagonale ou pentagonale.
Là on met une pointe à chaque sommet.

20 hexagones à 6 sommets soit 120 sommets.

12 pentagones à 5 sommets soit 60 sommets.

Donc 180 sommets en tout que l'on compte trois fois soit au final 60 sommets.
D'ailleurs le ballon de foot est un icosaèdre tronqué et a 60 sommets.

60 pointes donc $(60 \times 3)\ :\ 2$ soit 90 modules.

On divise par deux car un module sert pour deux pointes.

Une vidéo de Mickael Launay explique comment relier les volumes.
Son pliage au départ n'est pas tout à fait le même que celui proposé par les animatrices de l'atelier, mais le montage lui est le même.

DÉFINITION DU TRIMESTRE

Le Petit Vert n°158 présentait quelques définitions de mots croisés en relation avec les mathématiques. En voici une à proposer à vos élèves en début de collège.

Fait beaucoup plus pour les Romains.
(Michel Laclos)

N'hésitez à confier au Petit Vert vos propres découvertes !
Adresse : redactionpetivert@apmeplorraine.fr

Retour au sommaire

PROBLÈME 163
ARCS CONCOURANTS

Proposé par Fabien LOMBARD

On considère un triangle ABC ayant ses trois angles aigus et Γ son cercle circonscrit. On symétrise les trois arcs de Γ , $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$ par rapport, respectivement, aux côtés (AB), (BC) et (CA) . Montrer que ces trois arcs obtenus par symétrisation sont concourants.

SOLUTION PROBLÈME 162
UN NOMBRE IMPAIR DE LANCERS

Proposée par Philippe Févotte

Rappel de l'énoncé

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. On effectue des lancers successifs d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir k faces consécutives. Quelle est la probabilité que le nombre de lancers nécessaires soit impair ?

J'ai reçu une solution à ce problème de probabilités estival. Je présente d'abord celle de l'auteur, Jacques Choné, puis celle, plus générale, de Claude Morin ; je proposerai enfin une version différente, bien qu'assez proche de la seconde

Première solution (Jacques Choné)

Soit E l'événement étudié et p_k sa probabilité. Soit A_i pour i allant de 0 à $k-1$, les événements : « les lancers commencent par i "Face" suivi d'un "Pile" » et A_k l'événement « les lancers commencent par k "Face" ».

Le système des événements $(A_i)_{i=0 \quad k}$ est, par sa construction, un système complet d'événements ; par conséquent, en conditionnant l'événement E par les événements A_i, on obtient :

$$p_k = p(E) = \sum_{i=0}^{k-1} p(A_i)p_{A_i}(E) + p(A_k)p_{A_k}(E)$$

Le calcul de $p(A_0)p_{A_0}(E)$ est associé à l'événement où on a d'abord obtenu « P » et qu'on a gagné (soit un nombre impair de lancers) ; par conséquent on doit encore effectuer un nombre pair de

Retour au sommaire

lancers, ce qui correspond à « obtenir les k ″ Face ″ successives en un nombre pair de lancers ».
Par conséquent $\mathrm{p}\left(\mathrm{A}_0\right)\mathrm{p}_{\mathrm{A}_0}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right)$

Par un raisonnement analogue, si le début des lancers est « FP », et qu'on a gagné, on aura effectué ensuite un nombre impair de lancers et alors $\mathrm{p}\left(\mathrm{A}_1\right)\mathrm{p}_{\mathrm{A}_1}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)$

Le même raisonnement va s'appliquer une fois sur deux. Ainsi,

Si k est impair :

$$\mathrm{p}_\mathrm{k} = \mathrm{p}(\mathrm{E}) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right) + \frac{1}{4}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) + \frac{1}{8}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right) + \frac{1}{16}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) + ... + \frac{1}{2^\mathrm{k}}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right) + \frac{1}{2^\mathrm{k}} \times 1$$

Si k est pair :

$$\mathrm{p}_\mathrm{k} = \mathrm{p}(\mathrm{E}) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right) + \frac{1}{4}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) + \frac{1}{8}\left(1 - \mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\right) + \frac{1}{16}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) + ... + \frac{1}{2^\mathrm{k}}\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) + \frac{1}{2^\mathrm{k}} \times 0$$

On en déduit que :

Dans le cas où k est impair :

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^\mathrm{k}}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^\mathrm{k}} + \frac{1}{2^\mathrm{k}}\right)$$

Par conséquent, en notant $\mathrm{k} = 2\mathrm{p} + 1$

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{2\mathrm{p}+1}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)}\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mathrm{p}+2}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2^{2\mathrm{p}+1}}\right)$$

Après simplification, on obtient $\mathrm{p}(\mathrm{E})\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{2^{2\mathrm{p}}}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2^{2\mathrm{p}}}\right)$ ou encore $\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{2 + 2^{2\mathrm{p}+2}}{1 + 2^{2\mathrm{p}+3}}$

Ou encore, dans le cas où k est impair, $\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{2 + 2^{\mathrm{k}+1}}{1 + 2^{\mathrm{k}+2}}$

Dans le cas k est pair, des calculs analogues donnent $\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{-2 + 2^{\mathrm{k}+1}}{-1 + 2^{\mathrm{k}+2}}$

Ce qui permet de donner comme écriture unique :

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{E}\right) = \frac{2\left(-1\right)^{\mathrm{k}+1} + 2^{\mathrm{k}+1}}{\left(-1\right)^{\mathrm{k}+1} + 2^{\mathrm{k}+2}}$$

Pour compléter cette correction, Jacques Choné a proposé un programme écrit en Python qui fournit une estimation de la probabilité recherchée :

```
""" ce programme simule la probabilité d obtenir k Face successivement
en un nombre impair de lancers

La fonction expk() définit une expérience jusqu'à l'obtention
d'une succession de k Face

La fonction estk() donne une estimation de la probabilité recherchée"""
```

```
from random import *

def expk(k) : # 0 représente obtenir Face
    a = [randint(0,1) for i in range(k)]
    c = k
    while a!=[0 for i in range(k)] :
        a = [a[i] for i in range(1,k)]+[randint(0,1)]
        c = c+1
    if c%2 != 0 :
       return(1)
    else :
        return(0)
def estk(n,k) :
    return(sum(expk(k) for i in range(n))/n)
```

Ainsi :

`estk(10**6.3)` renvoie `0.5454` pour une valeur réelle $\dfrac{6}{11} = 0,545454...54$

`estk(10**5.2)` donne `0.39859` pour une valeur réelle 0,4

Par ailleurs, il propose un lien pour une étude dans le cas $k = 2$, par plusieurs méthodes, l'une d'elles faisant apparaitre les nombres de Fibonacci !

Deuxième solution (Claude Morin)

Claude Morin propose d'étudier le problème dans un cas plus général. Cette solution fait intervenir une série proche de la fonction génératrice d'une variable aléatoire.

Comme nous le verrons en fin d'article, cette étude revient à considérer une pièce non équilibrée.

Généralisons un peu en faisant des tirages équiprobables dans $[\![1, N]\!]$ et en considérant la variable X_k égale au nombre de tirages pour obtenir pour la première fois k fois le 1 consécutivement (il suffira de poser $N = 2$ pour retrouver le problème initial).

1) Soit u_n le nombre de suites de longueur n formées d'entiers dans $[\![1, N]\!]$ et telles qu'il n'y ait jamais k fois le 1 consécutivement.

Pour $1 \leq n \leq k - 1$ on a $u_n = N^n$ et $u_k = N^k - 1$.

Il existe une formule de récurrence : $u_n = (N - 1)(u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_{n-k})$ car si la suite de longueur n débute par $j - 1$ fois le 1 suivis d'un chiffre différent de 1 (avec $1 \leq j \leq k$) alors il y a $(N - 1)\,u_{n-j}$ façons de compléter les 1.

On posera $u_0 = 1$ pour que la récurrence soit valable à partir de $n = k$.

De cette récurrence on déduit une autre récurrence plus simple en retranchant l'égalité pour n à celle pour $n + 1$: $u_{n+1} = Nu_n - (N - 1)\,u_{n-k}$ (valable pour $n \geq k$).

2) On a $P(X_k = n) = 0$ si $n \leq k - 1$, $P(X_k = k) = \frac{1}{N^k}$ et $P(X_k = n) = \frac{(N-1)\,u_{n-k-1}}{N^n}$ pour $n \leq k+1$ (puisque $(X_k = n)$ signifie qu'on a une suite de longueur $n - k - 1$ sans k fois le 1 consécutivement, suivie par un chiffre différent de 1 et terminée par k fois le 1).

3) Posons $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_k = n)(Nt)^n = t^k + \sum_{n=k+1}^{\infty} (N-1)\,u_{n-k-1}t^n$.

Cette fonction est de manière évidente définie sur un intervalle I contenant $\left[\frac{-1}{N}, \frac{1}{N}\right]$

Comme l'équation caractéristique de la deuxième récurrence est $x^{k+1} - Nx^k + (N-1) = 0$ nous allons calculer $\left(1 - Nt + (N-1)\,t^{k+1}\right) G(t)$:

$$\left(1 - Nt + (N-1)\,t^{k+1}\right) t^k + (N-1)\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} u_{n-k-1}t^n - N\sum_{n=k+2}^{\infty} u_{n-k-2}t^n + (N-1)\sum_{n=2k+2}^{\infty} u_{n-2k-2}t^n\right)$$

après avoir fait les changements d'indices $n' = n+1$ et $n' = n+k+1$ dans les deux dernières sommes.

On obtient ensuite :

$$\left(1 - Nt + (N-1)\,t^{k+1}\right) t^k + (N-1)\,u_0t^{k+1} + (N-1)\sum_{n=k+2}^{2k+1} \left(u_{n-k-1} - Nu_{n-k-2}\right) t^n$$

puisqu'on a $\sum_{n=2k+2}^{\infty} \left(u_{n-k-1} - Nu_{n-k-2} + (N-1)\,u_{n-2k-2}\right) t^n = 0$ (par la relation de récurrence).

En utilisant $u_n = N^n$ pour $0 \leq n \leq k-1$ et $u_k = N^k - 1$ on simplifie en :

$$t^k - Nt^{k+1} + (N-1)\,t^{2k+1} + (N-1)\,t^{k+1} + (N-1)\sum_{n=k+2}^{2k+1} \left(N^{n-k-1} - N^{n-k-1}\right) t^n - (N-1)\,t^{2k+1}$$

D'où l'on tire enfin : $G(t) = \dfrac{t^k(1-t)}{1 - Nt + (N-1)\,t^{k+1}}$.

4) La probabilité que X_k soit impair est égale à :

$$P(X_k = 1) + P(X_k = 3) + \ldots = \frac{1}{2}\left(G\left(\frac{1}{N}\right) - G\left(-\frac{1}{N}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\left(\frac{-1}{N}\right)^k\left(1 + \frac{1}{N}\right)}{2 + (N-1)\left(-\frac{1}{N}\right)^{k+1}}\right)$$

qui se simplifie en $\dfrac{N^{k+1} + N(-1)^{k+1}}{2N^{k+1} + (N-1)(-1)^{k+1}}$

Dans le cas $N = 2$ on obtient $\dfrac{2^{k+1} + 2(-1)^{k+1}}{2^{k+2} + (-1)^{k+1}}$.

4) Une variante de cet exercice considère la variable Y_k égale au nombre de tirages pour obtenir pour la première fois k chiffres consécutifs égaux. L'étude est analogue et on peut montrer

Retour au sommaire

que la loi de Y_k est la même que celle de $X_{k-1}+1$. La probabilité que Y_k soit impair est alors égale à la probabilité que X_{k-1} soit pair, c'est-à-dire : $\dfrac{N^k-(-1)^k}{2N^k+(N-1)(-1)^k}$

On peut aussi calculer les espérances : $E(X_k)=N+N^2+\ldots+N^k$ et $E(Y_k)=1+N+\ldots+N^{k-1}$. On a donc $E(X_k)=NE(Y_k)$ ce qui est raisonnable !

Troisième solution

Dans cette solution, on retrouvera des arguments assez proches de la solution précédente, mais sans pour autant utiliser de fonction génératrice.

On va essayer de déterminer la loi de probabilité du « temps d'attente » avant l'obtention de la première série de k « Face » consécutifs ; on note T_k cette variable aléatoire et $p_n=P(T_k=n)$ pour les valeurs de $n\geq 1$.

De manière évidente, pour $n\leq k-1$, on a $p_n=0$ et $p_k=P(T_k=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$

On introduit l'événement : « il n'y a pas eu de lancers de k « faces » consécutifs dans les n premiers lancers ».

Ainsi pour tout $n\geq 1$, l'événement « obtenir la première série de k « Face » consécutifs au rang $k+n+1$ » est la conjonction des événements indépendants :

- Ne pas obtenir de série de k « Face » consécutifs dans les n premiers lancers
- Le lancer de rang $n+1$ donne « Pile »
- Les k lancers suivants donnent « Face »

Le contraire de « ne pas obtenir de série de k " Face " consécutifs dans les n premiers lancers » est obtenir une série au temps 1, ou au temps 2,.... Et par conséquent la probabilité de « ne pas obtenir de série de k « Face » consécutifs dans les n premiers lancers » est égale à $1-\sum_{i=1}^{n}p_i$

On en déduit que $p_{k+n+1}=\left(1-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

Cette relation ne permet pas de donner simplement une forme explicite de p_n, mais on peut remarquer qu'on peut obtenir, comme dans la solution précédente, une relation de récurrence plus simple.

En effet, $p_{k+n+1}=\left(1-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k=\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}p_i\right)\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}p_n$, soit :

$$p_{k+n+1}=p_{k+n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}p_n$$

Cette forme va être suffisante pour répondre à la question posée.

En effet la probabilité cherchée est $S=p_1+p_3+p_5+\ldots=\sum_{n,\text{entier impair}}p_n$

Prenons le cas où <u>k est impair</u>.

Pour $n=1$, on obtient $p_{k+2}=p_{k+1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}p_1$

Pour $n=3$, on obtient $p_{k+4}=p_{k+3}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}p_3$

Retour au sommaire

Etc…

Par sommation on a alors $S - p_k = (1 - S) - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} S$; et par conséquent après calcul, on retrouve bien $S = \frac{2^{k+1}+2}{2^{k+2}+1}$

De même dans le cas k pair, on retrouve bien le résultat attendu.

Même si cela ne fait pas partie de l'exercice proposé, on peut remarquer que cette solution permet de déterminer l'espérance de la variable T_k

En effet on sait que $E(T_k) = \sum_{n\geq 0} p_n \times n = \sum_{n\geq 0} p(T_k > n)$

Pour le démontrer il suffit de remarquer que $p(T_k > i) = p(T_k = i+1) + p(T_k = i+2) + \ldots$

La sommation de ces termes fait apparaitre pour chaque valeur de i , i fois le terme $p(T_k = i)$, ce qui donne la formule indiquée.

Or pour $n \geq 1$, $(T_k > n)$ est l'événement « il n'y a pas eu de lancers de k " Face " consécutifs dans les n premiers tirages » dont la probabilité est $1 - \sum_{i=1}^{n} p_i = p_{k+n+1} \times 2^{k+1}$; et bien sûr $p(T_k > 0) = 1$.

Par conséquent, $E(T_k) = 1 + \sum_{n\geq 1} p_{k+n+1} \times 2^{k+1} = 1 + 2^{k+1} \sum_{n\geq 1} p_{k+n+1} = 1 + 2^{k+1} \sum_{n\geq k+2} p_n$

Sachant que pour tout $i < k$, $p_k = 0$, on en déduit que $1 = p_k + p_{k+1} + \sum_{n\geq k+2} p_n$.

Comme $p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $p_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, on en déduit que

$$E(T_k) = 1 + 2^{k+1}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) = 2^{k+1} - 2$$

On peut remarquer que $E(T_k) = 2(2^k - 1) = 2(1 + 2 + \ldots + 2^{k-1})$, c'est-à-dire $E(T_k) = 2 + \ldots + 2^k$. Ainsi, augmenter k de 1 ajoute une puissance de 2 au nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir une série de k « Face » consécutifs.

On retrouve bien le résultat obtenu dans la deuxième solution dans le cas $N = 2$.

Dans le cas plus général où la pièce n'est pas équilibrée, avec p la probabilité d'obtenir « Face », on peut reprendre l'exercice et sans grande modification, on obtient $E(T_k) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \ldots + \frac{1}{p^k}$, résultat déjà indiqué dans la seconde solution.

Retour au sommaire

Les objets de la Régionale de Lorraine

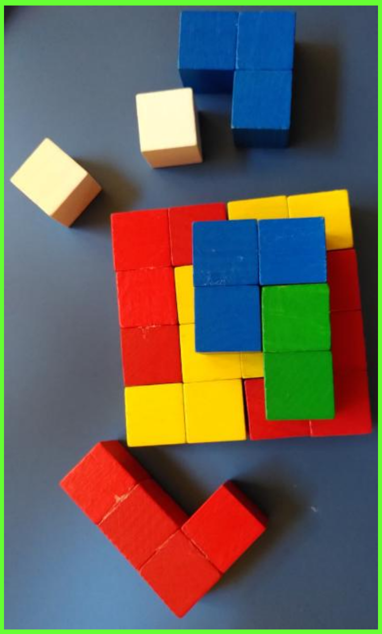
Avec des « PETITS L »

5 euros les 20 « Petits L »

Puzzle à 7 triangles

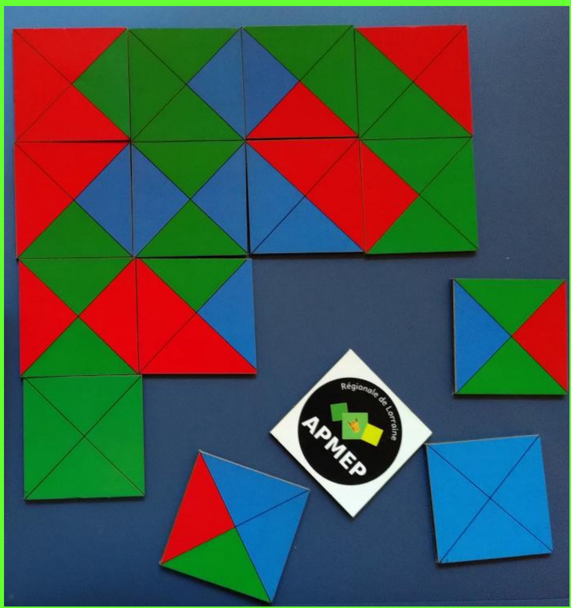
5 euros

Pyramide Aztèque



10 euros

Carrés de MacMahon



7 euros

Losangram et Losange de Metz

5 euros chacun

Des réductions sont possibles sur les prix pour les achats en grande quantité.
Pour tout renseignement et toute commande, vous pouvez vous adresser à

boutique@apmeplorraine.fr